

Supélec

Matrices Aléatoires et Télécommunications: de Wigner à Shannon

Mérouane Debbah

Alcatel-Lucent Chair on Flexible Radio

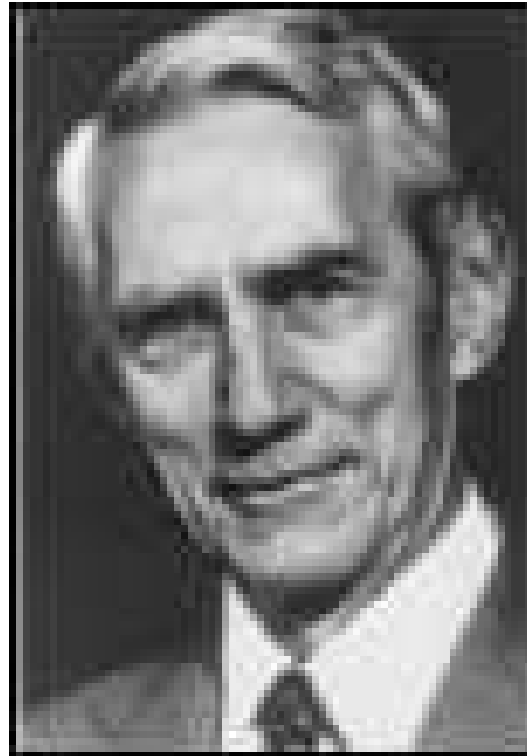
merouane.debbah@supelec.fr

Evolution des standards

3G	4G	IMT Adv.	??
1.0 Mbps SE=0.5	10 Mbps SE=2.5	100 Mbps SE=10.0	1000 Mbps SE=?
2003	2008	2013	2018

Bell Labs (1948)

A Mathematical Theory of Communication, The Bell Labs Technical Journal, July-October, vol. 27, 379-457,623-656, 1948.



(1921-1948)

La théorie de l'information

- L'information est une mesure objective de notre incertitude indépendante du sens du message.
- Cette incertitude est désignée par la notion d'entropie.
- Elle est liée au nombre de possibilités (et donc aux probabilités) de réalisation du message.
- Exemple: Si un message peut avoir $M = 2^N$ possibilités, il contient $\log_2(M) = N$ bits d'information.

Le cas continu

- Dans le cas continu, une formulation de la notion d'information existe.
- Dans le cas d'un signal bande limitée, Shannon trouve une représentation élégante du signal à partir d'un certain nombre de ces échantillons: c'est le théorème d'échantillonnage de Shannon.
- Ironie de l'histoire, ce théorème est dans la section "mathematical preliminaries".

Comment transmettre un signal?

- Shannon donne le schéma général d'un schéma de communication.
- La notion de débit est également introduite: pendant une durée T , le signal est émis selon un certain nombre de niveaux M .
- Le débit est donné par: $\frac{\log_2(M)}{T}$ bits/s.
- Le schéma de communication comprend:
 - Un source d'information.
 - Un transmetteur.
 - Un canal
 - Un récepteur
 - Une destination.

Comment transmettre un signal?

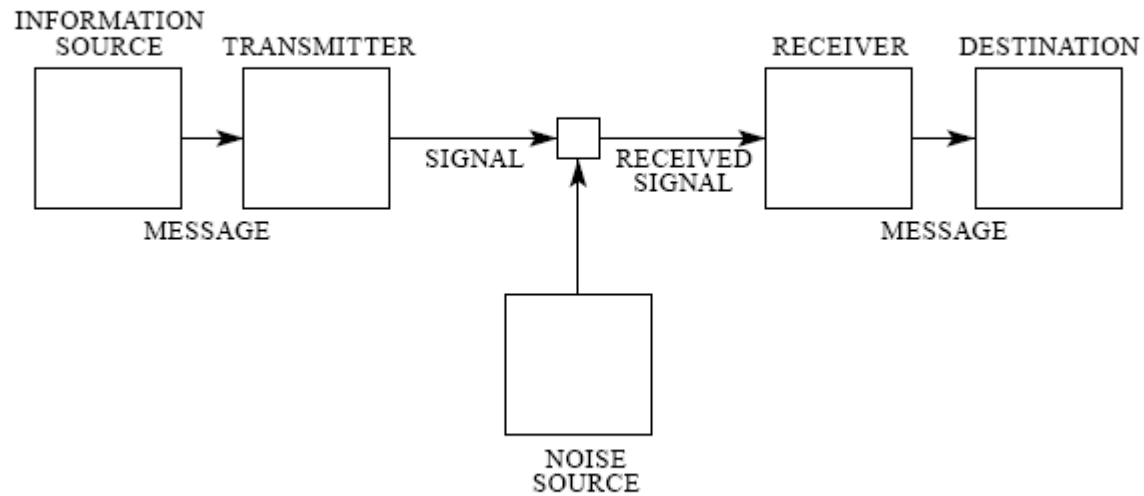
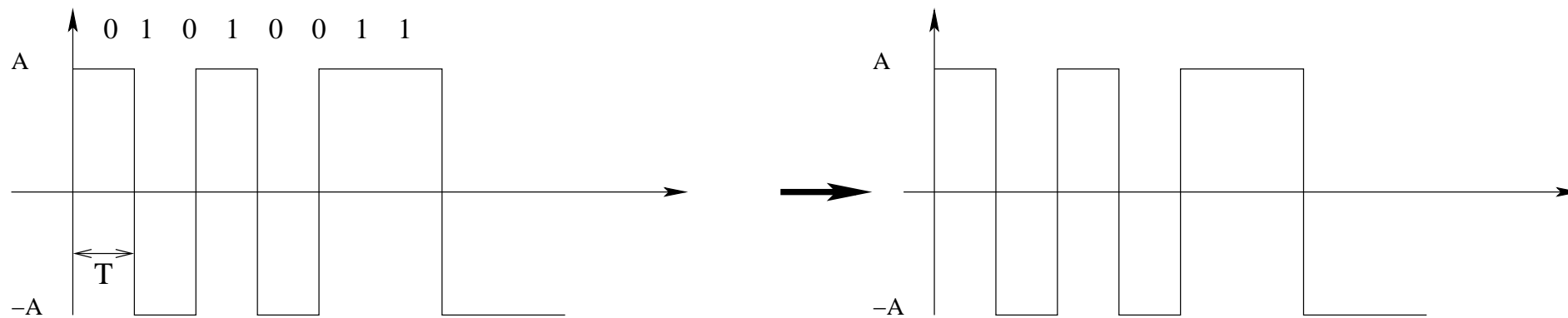
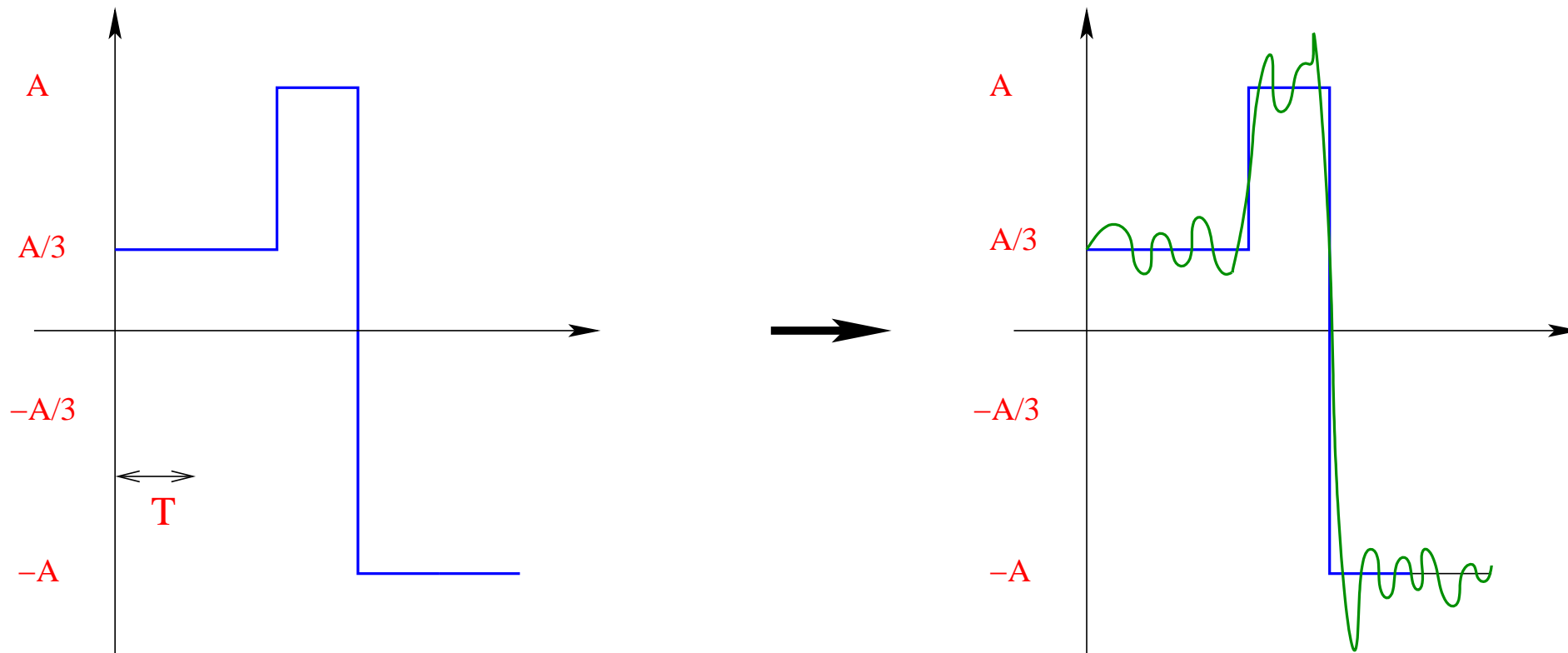


Fig. 1—Schematic diagram of a general communication system.

Exemple



Exemple



Existe-t-il une limite au débit?

- On peut effectivement augmenter le débit (en tant que vitesse de transmission) en augmentant le nombre de niveaux.
- Par contre, si l'on parle de débit en tant que nombre de bits par seconde arrivant sans erreur au niveau du récepteur, alors ceci n'est pas possible.

Existe-t-il une limite au débit?

- En effet, plus le nombre de niveaux augmente (à puissance fixée, la puissance est toujours normalisée pour des questions de coût de transmission) et plus les niveaux émis ont des valeurs de plus en plus proches.
- Par contre, si l'on parle de débit en tant que nombre de bits par seconde arrivant sans erreur au niveau du récepteur, alors ceci n'est pas possible.
- Il est alors difficile au niveau du récepteur de discriminer entre 2 valeurs entachées d'erreurs dûes au bruit.

Existe-t-il une limite au débit?

- Le débit a donc une limite déterminée par un seuil que l'on appelle la capacité du canal.
- Le fait de pouvoir transmettre à un débit non nul sans erreur était une idée à contre-courant des travaux des scientifiques avant 1949.
- Il était alors naturel à l'époque de réduire la probabilité d'erreur d'une transmission en réduisant le débit. Ce n'est qu'avec les travaux de Shannon que le codage est apparu comme une issue à ce dilemme.

Capacité d'un canal

On encode une série de C bits en un vecteur de dimension N .

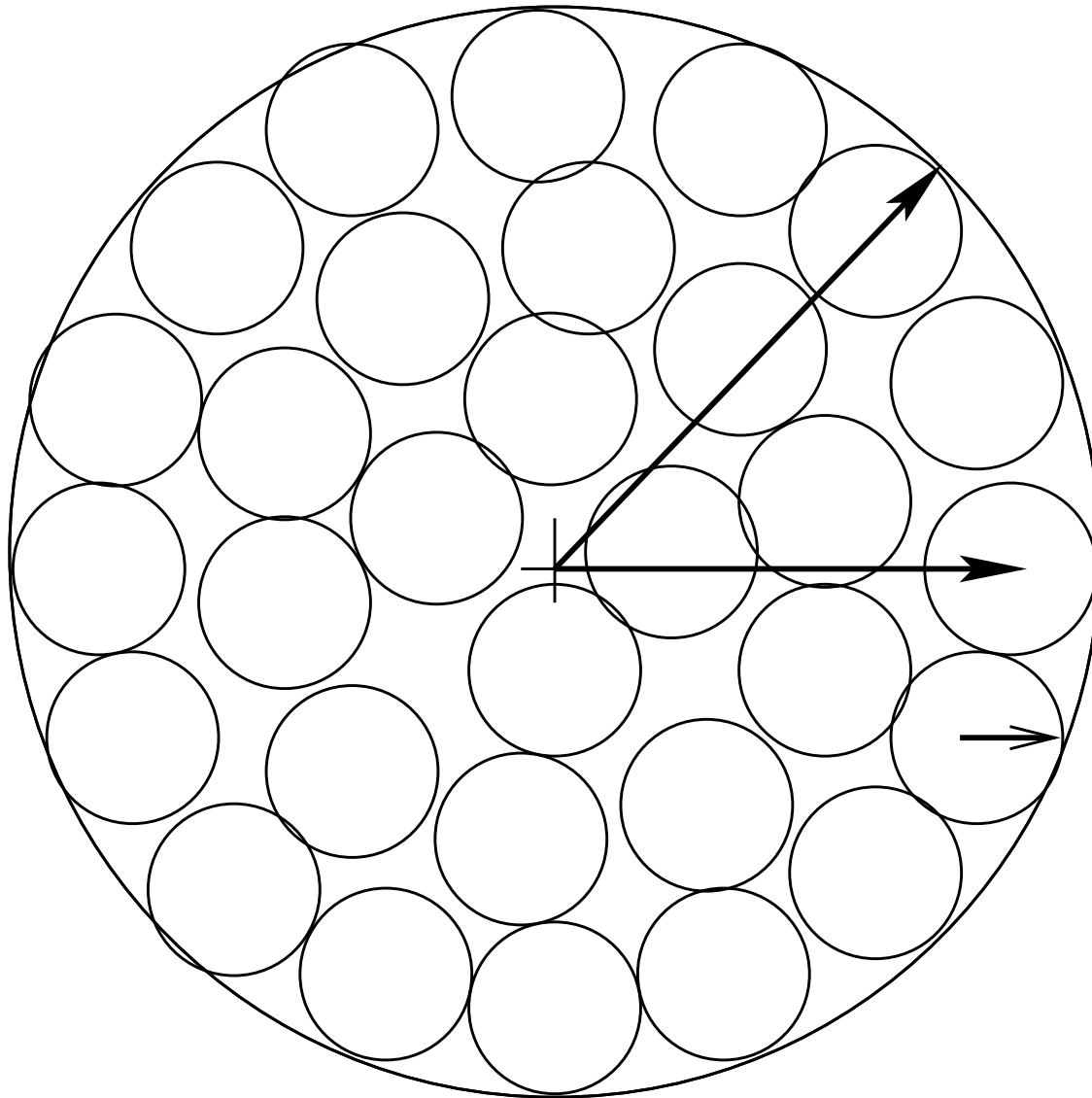
y , x et \mathbf{b} sont des vecteurs de dimension N

$$y = x + \mathbf{b}$$

Pour N assez grand, la puissance de

- \mathbf{b} est proche de $N\sigma^2$
- x est proche de NP
- y est proche de $N(P + \sigma^2)$

Capacité d'un canal



Capacité d'un canal

Le volume de la sphère du signal est proportionnel à $(\sqrt{N(P + \sigma^2)})^N$

Le volume de la sphère du bruit est proportionnel à $(\sqrt{N(\sigma^2)})^N$

Le nombre total de codes (messages) que l'on peut mettre est donné par le ratio suivant:

$$\frac{(\sqrt{N(P + \sigma^2)})^N}{(\sqrt{N(\sigma^2)})^N}$$

Ce qui donne un nombre de bits par temps symbole égal à:

$$C = \frac{1}{NT} \log_2 \left(\frac{(\sqrt{N(P + \sigma^2)})^N}{(\sqrt{N(\sigma^2)})^N} \right) = \frac{1}{2T} \log_2 \left(\frac{P + \sigma^2}{\sigma^2} \right)$$

Volume d'une sphère

Le volume d'une sphère de rayon r (en dimension N) est donné par:

$$V = \frac{\pi^{\frac{N}{2}} r^N}{\Gamma(\frac{N}{2} + 1)}$$

Capacité d'un canal

$$y = x + n$$

$$C = \frac{1}{2T} \log_2\left(\frac{P + \sigma^2}{\sigma^2}\right)$$

Dans le cas complexe et si on définit $\text{SNR} = \frac{P}{\sigma^2}$, la capacité est donnée par:

$$C = \frac{1}{T} \log_2(1 + \text{SNR})$$

Bande et Rapport Signal à Bruit

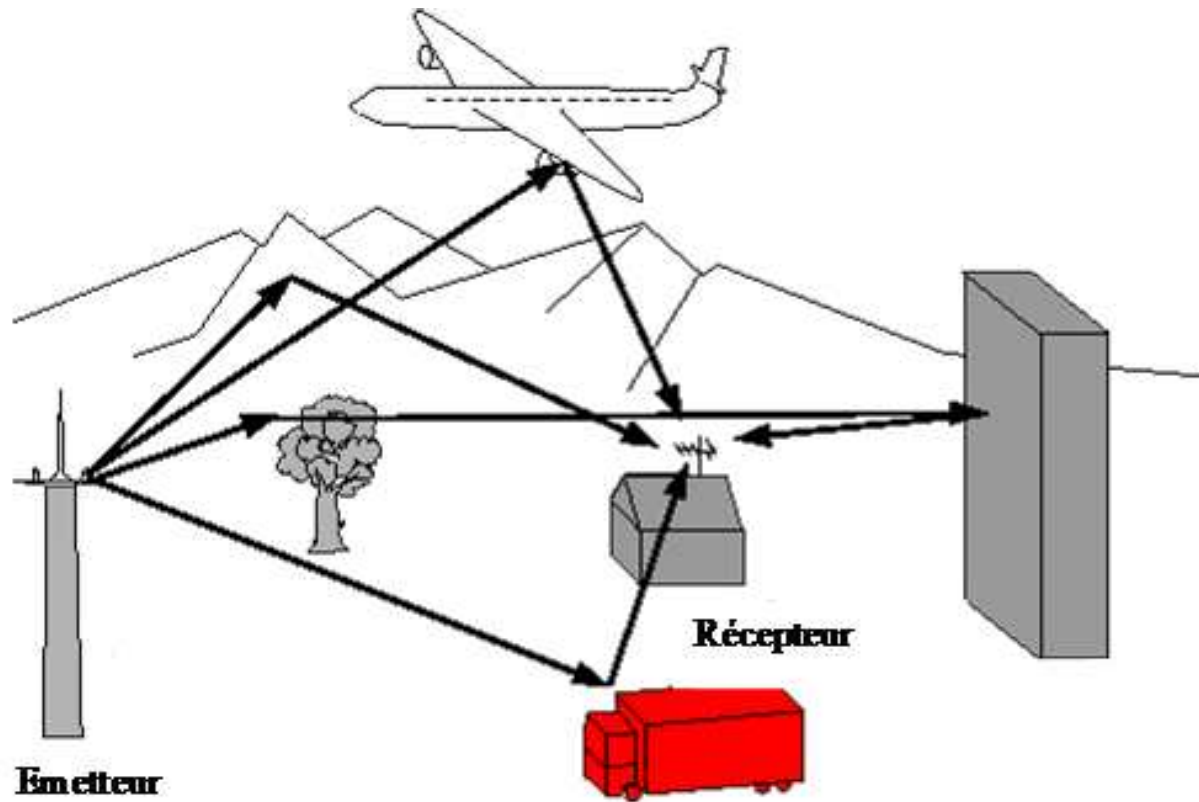
$$C = W \log(1 + \text{SNR})$$

$$\text{SNR} = C \frac{Eb}{N0}$$

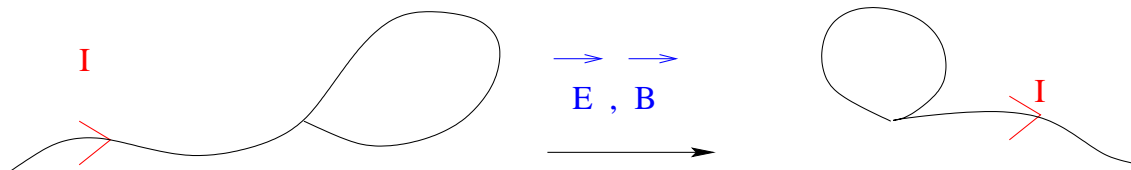
$$\lim_{C \rightarrow 0} \frac{Eb}{N0} = \frac{2^C - 1}{C} = \log(2)$$

Nous n'avons que deux degrés de liberté

Le monde sans fils



Le monde sans fils

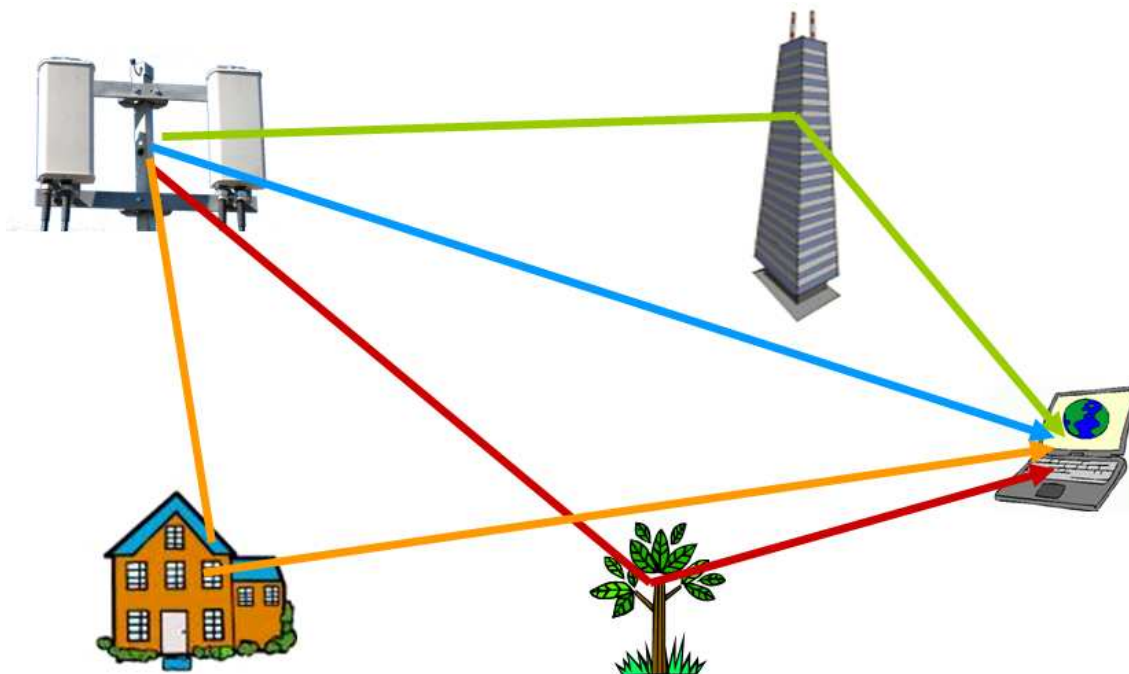


Le monde sans fils

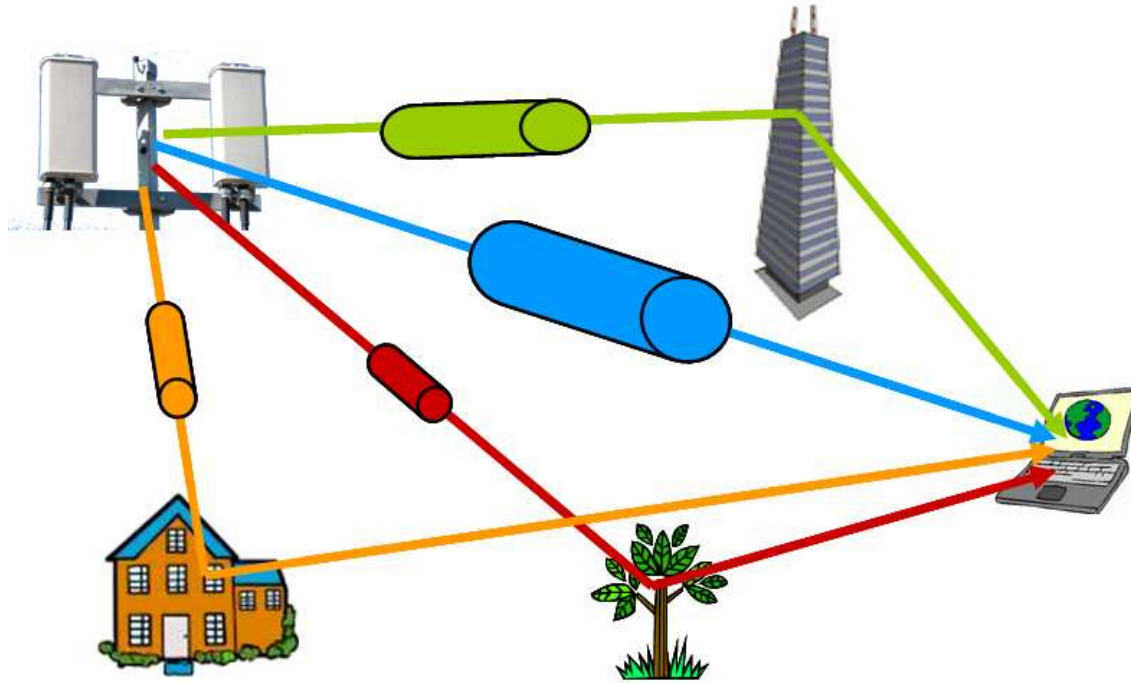
$$y = hx + n$$

$$C = W \log\left(1 + \frac{|h|^2 P}{\sigma^2}\right)$$

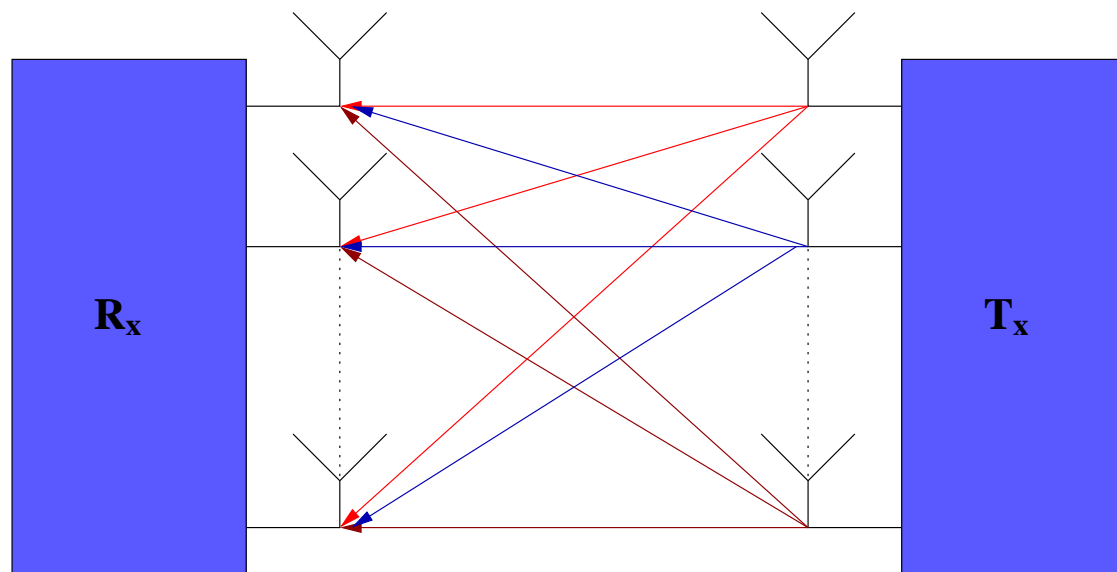
Les réseaux Multi-Antennes sans fils



Les réseaux Multi-Antennes sans fils



Les réseaux Multi-Antennes sans fils



Représentation Matricielle

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & \dots & h_{1n_t} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ h_{nr1} & \dots & \dots & h_{nrn_t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Capacité d'un système MIMO

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{U}^H \mathbf{y}$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{V}^H \mathbf{x}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{s} + \mathbf{n}'$$

Capacité d'un système MIMO

$$y(i) = \lambda(i)s(i) + n(i)$$

Sur chaque lien spatial, la capacité est de:

$$C_i = \log_2\left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\sigma^2}\right)$$

La capacité totale est donnée par:

$$C = \sum_{i=1}^{n_r} \log_2\left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\sigma^2}\right)$$

L'espace joue le même rôle que la bande.

Capacité d'un système MIMO

$$C = \sum_{i=1}^{n_r} \log_2 \left(1 + \left(1 + \frac{\lambda_i^2}{\sigma^2} \right) \right)$$

$$C = \log_2 \det \left(\mathbf{I} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right)$$

Quels sont les débits que l'on peut atteindre dans les milieux sans fils MIMO?

Freebox ADSL MIMO

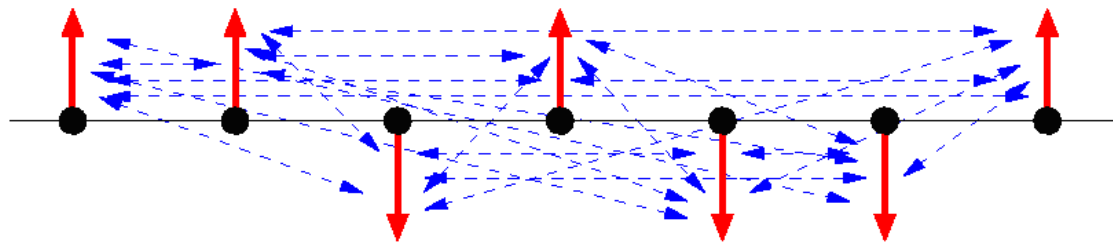


”Parmis les nouveautés techniques de cette freebox HD, on notera l’utilisation d’une nouvelle solution sans fil dénommée Wifi MIMO”

Equation de Schrodinger

$$H\Phi_i = E_i\Phi_i$$

Φ_i est la fonction d'onde
 E_i est le niveau d'énergie
 H est un hamiltonien



Interaction magnétique entre les spins

La naissance des matrices aléatoires



Eugene Paul Wigner, 1902-1995

L'aléatoire en 1955

E. Wigner. "Characteristic Vectors of bordered matrices with infinite dimensions", The annal of mathematics, vol. 62, pp.546-564, 1955.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quand la dimension de la matrice augmente, que peut-on dire des valeurs propres (niveaux d'énergie)?

Matrices de Wigner: la loi semi-circulaire

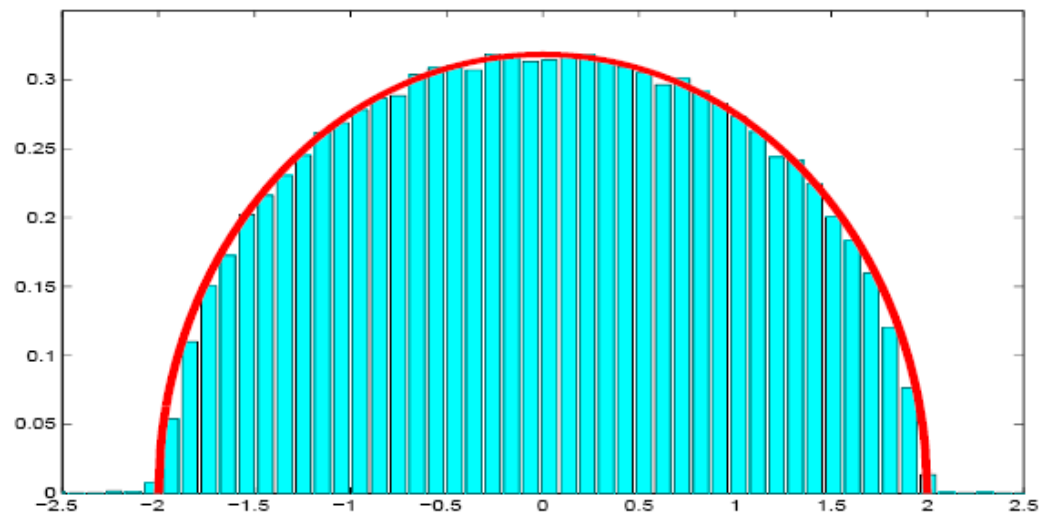


Figure 2: The semicircle law density function (4) compared with the histogram of the average of 100 empirical density functions for a Wigner matrix of size $n = 100$.

Loi empirique des valeurs propres de \mathbf{H}

\mathbf{H} est hermitienne

$$dF_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i)$$

Les moments de la distribution sont donnés par:

$$\begin{aligned} m_1^N &= \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{H}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i = \int \lambda dF_N(\lambda) \\ m_2^N &= \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{H})^2 = \int \lambda^2 dF_N(\lambda) \\ \dots &= \dots \\ m_k^N &= \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{H})^k = \int \lambda^k dF_N(\lambda) \end{aligned}$$

Dans beaucoup de cas, tous les moments convergent. C'est exactement le genre de résultat dont nous avons besoin pour comprendre le réseau.

Matrices de Wigner: la loi semi-circulaire

La preuve de Wigner pour la convergence vers la loi semi-circulaire

Les moments empiriques de $\frac{1}{N}\text{Trace}(\mathbf{H}^{2k}) \rightarrow$ Nombres de Catalan

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Trace}(\mathbf{H}^{2k}) &= \int_{-2}^2 x^{2k} f(x) dx \\ &= \frac{1}{k+1} C_k^{2k}\end{aligned}$$

Comme la loi est symétrique, les moments impaires tendent vers zéro.

Matrices de Wigner: la loi semi-circulaire

Calcul récursif:

On intègre par parties et on obtient:

$$\begin{aligned}\alpha_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 x^{2k} \sqrt{4-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} x^{2k-1} (4-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} (x^{2k-1} (4-x^2))' dx \\ &= 4(2k-1)\alpha_{2k-2} - (2k+1)\alpha_{2k}\end{aligned}$$

Le résultat est donc obtenu de manière récursive:

$$\alpha_{2k} = \frac{2(2k-1)}{k+1} \alpha_{2k-2}$$

Nombres de Catalan



Eugène Charles Catalan, 1814-1894

Matrices de Wigner: la loi semi-circulaire

E. Wigner. "On the Distribution of Roots of certain symmetric matrices", *The Annals of Mathematics*, vol. 67, pp.325-327, 1958.

Theorem2. Consider a $N \times N$ standard Wigner matrix \mathbf{W} such that, for some constant κ and sufficiently large N ,

$$\max_{i,j} \mathbb{E}(|w_{ij}|^4) \leq \frac{\kappa}{N^2}$$

Then the empirical distribution of \mathbf{W} converges almost surely to the semi-circle law whose density is:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}$$

with $|x| \leq 2$

The semi-circle law is also known as the non-commutative analog of the Gaussian distribution.

Remarques sur les résultats asymptotiques

Distribution: la distribution asymptotique ne dépend pas de la distribution des entrées indépendentes.

Ergodicité: L'histogramme des valeurs propres d'une réalisation converge presque sûrement vers la distribution asymptotique des valeurs propres.

Vitesse de Convergence: $\delta = \infty$

Cas Gaussien: C'est le seul cas pour lequel nous savons traiter le cas non-asymptotique.

Determinisme et alatoire

- Distribution de $\lambda(\mathbf{H})$.
- Distribution de $\lambda(\mathbf{H}^H \mathbf{H})$.
- Distribution de $\lambda_{\max}(\mathbf{H})$.
- Distribution conjointe de $\lambda_1(\mathbf{H}), \dots, \lambda_N(\mathbf{H})$.
- Distribution de l'espacement des valeurs propres (liée à la fameuse hypothèse de Riemann).
- Distribution de $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$.
- Distribution de la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$.

L'alatoire en 1967

\mathbf{H} une matrice $N \times K$ avec des éléments i.i.d., de moyenne zéro et de variance $1/N$.

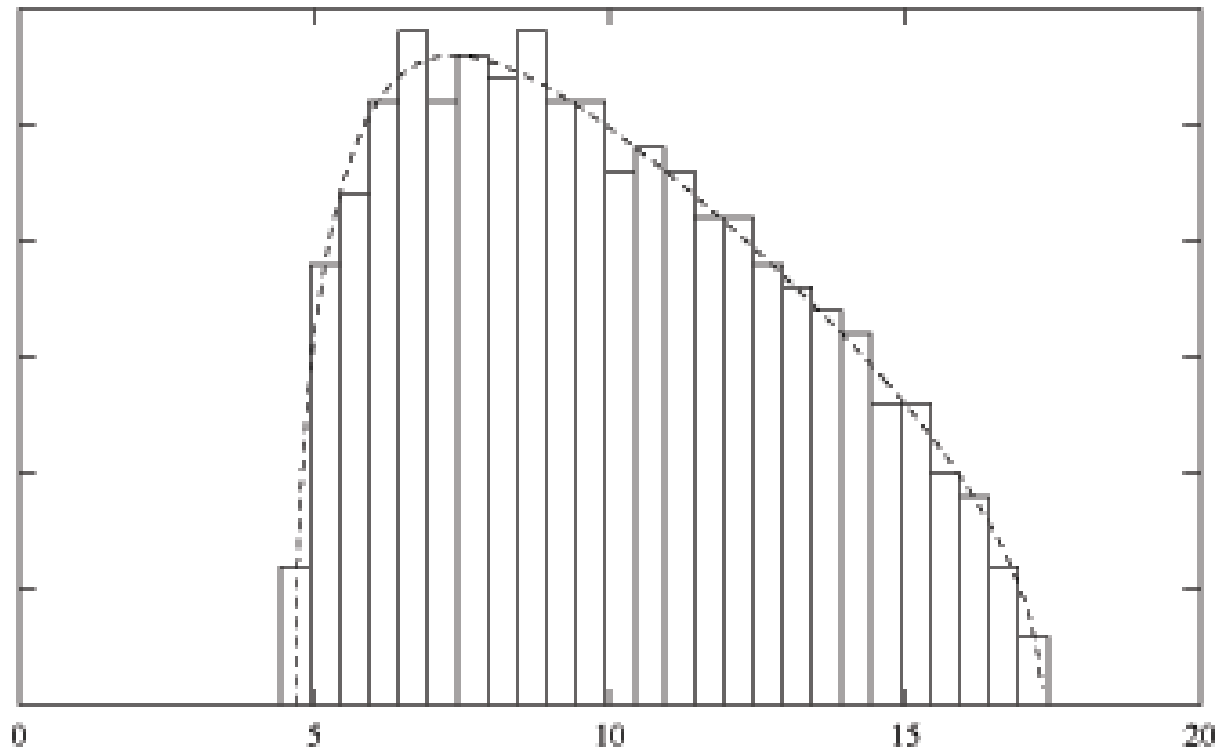
Valeurs propres de

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c} N \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{H} \end{array} \right] \end{array} \right]}_K \left[\begin{array}{c} \mathbf{H}^H \end{array} \right]$$

quand $N \rightarrow \infty$, $K/N \rightarrow \alpha$ **ne sont l'identité!**

Remarque: Si les entrées sont Gaussiennes, nous parlons de matrices de Wishart avec K degrés de liberté. La distribution exacte est connue dans le cas fini.

Distribution limite des valeurs propres pour $\alpha = 10$



Remarque: De manière assez remarquable, le support est borné alors que les entrées peuvent prendre n'importe quelle valeur.

Distribution empirique des valeurs propres de $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$

\mathbf{H} est $N \times K$ i.i.d avec $\frac{K}{N} = \alpha$

$$dF_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i)$$

Les moments sont donnés par:

$$m_1^N = \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^H) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i \rightarrow 1$$

$$m_2^N = \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \rightarrow 1 + \alpha$$

$$m_3^N = \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^3 \rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 1$$

The Marchenko-Pastur Distribution Law

V. A. Marchenko and L. A. Pastur, "Distributions of eigenvalues for some sets of random matrices," Math USSR-Sbornik, vol.1 pp.457-483, 1967.

Theorem. Consider an $N \times K$ matrix \mathbf{H} whose entries are independent zero-mean complex (or real) random variables with variance $\frac{1}{N}$ and fourth moments of order $O(\frac{1}{N^2})$. As $K, N \rightarrow \infty$ with $\frac{K}{N} \rightarrow \alpha$, the empirical distribution of $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ converges almost surely to a nonrandom limiting distribution with density

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^+ \delta(x) + \frac{\sqrt{(x-a)^+(b-x)^+}}{2\pi\alpha x}$$

where $a = (1 - \sqrt{\alpha})^2$ and $b = (1 + \sqrt{\alpha})^2$.

Matrice carré avec des coefficients i.i.d

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

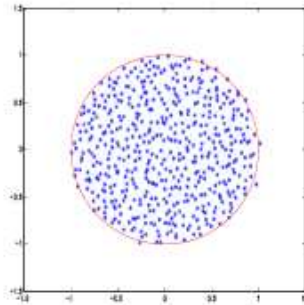


Figure 3: The full-circle law and the eigenvalues of a realization of a 500×500 matrix

La loi circulaire

V. L. Girko, "Circular Law", Theory. Prob. Appl., vol. 29, pp. 694-706, 1984

Z. D. Bai, "The Circle Law", The Annals of Probability, pp. 494-529, 1997.

Theorem. Let \mathbf{H} be an $N \times N$ complex random matrix whose entries are independent random variables with identical mean and variance and finite k th moments for $k \geq 4$. Assume that the joint distribution of the entries real and imaginary parts of the entries have uniformly bounded support densities. Then, the asymptotic spectrum of \mathbf{H} converges almost surely to the circular law, namely the uniform distribution over the unit disk on the complex plane, $\{\xi \in \mathbb{C}, |\xi| \leq 1\}$ whose density is given by:

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi}, |\xi| \leq 1$$

Les applications des matrices aléatoires

- Wigner (55) , Dyson (67) : Théorie des matrices aléatoires et physique nucléaire.
- Potters (00), Bouchaud (00) : Théorie des matrices aléatoires et finance.
- Voiculescu (91) , Biane (00), Hiai, Petz (00): Théorie des matrices aléatoires et théorie des probabilités libres.
- Silverstein (89), Pastur (72), Girko (90), Edelman (89): Théorie des matrices aléatoires et transform'ee de Cauchy-Stieljes.
- Speicher (92): Théorie des matrices aléatoires et combinatoire.
- Tanaka (01), Moustakas (03), Sengupta (03) : Théorie des matrices aléatoires et mécanique statistique.

Capacité de Shannon

Considérons la variable aléatoire

$$C_N = \frac{1}{N} \log \det \left(\mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{W} \mathbf{W}^H \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \lambda_k \left(\mathbf{W} \mathbf{W}^H \right) \right)$$

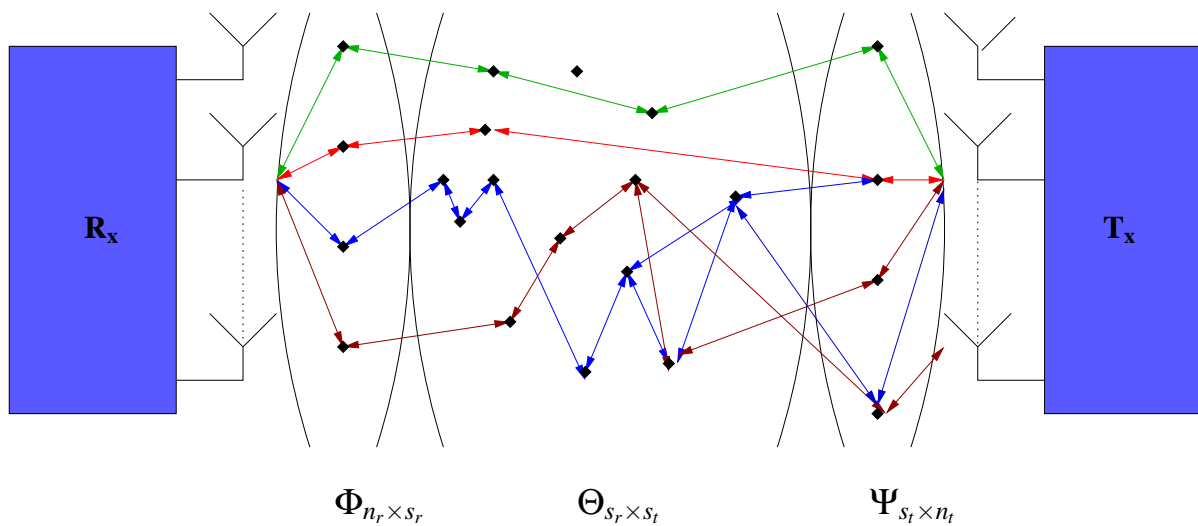
Quand $N \rightarrow \infty$ et $K/N \rightarrow \gamma$ ($\frac{1}{\sigma^2} = \rho$),

$$\begin{aligned} C_N &= \int_0^\infty \log(1 + \rho\lambda) dF(\lambda) \\ &= \gamma \log(1 + \rho - \rho\alpha) + \ln(1 + \rho\gamma - \rho\alpha) - \alpha \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[1 + \gamma + \frac{1}{\rho} - \sqrt{\left(1 + \gamma + \frac{1}{\rho} \right)^2 - 4\gamma} \right]$$

Propagation avec reflecteurs multiples



- $\Psi_{s_t \times n_t}$
- $\Phi_{n_r \times s_r}$
- $\Theta_{s_r \times s_t}$

Propagation avec reflecteurs multiples

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \\ &= \Phi_{n_r \times s_r} \Theta_{s_r \times s_t} \Psi_{s_t \times n_t} \mathbf{x} + \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_r} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) ?$$

L'aléatoire dans les années 1980

Que pouvons nous dire des valeurs propres de $C = AB$

- En général, il n'est pas possible de trouver les valeurs propres du produit de matrices à partir des valeurs propres de chaque matrice.
- Une exception est le cas où les matrices ont les mêmes vecteurs propres.

Distribution empirique des valeurs propres de $C = AB$

$$dF_C^N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i^C)$$

Dans beaucoup de cas, les moments asymptotiques de C peuvent s'exprimer en fonction des moments asymptotiques de A and B .

$$m_k^C = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{C})^k = f(m_1^A, \dots, m_k^A, m_1^B, \dots, m_k^B)$$

En d'autres termes, la distribution asymptotique des valeurs propres de C dépend uniquement de la distribution empirique des valeurs propres de A and B .

Quand cela arrive, les deux matrices sont libres et le cadre général est celui des probabilités libres. Ces résultats sont aussi valides pour $C = A + B$.

$$\text{Résultat H} = \frac{1}{\sqrt{s_r s_t}} \Phi \Theta \Psi$$

η et ξ sont respectivement les valeurs propres $\frac{1}{s_r} \Phi \Phi^H$ et $\frac{1}{s_t} \Psi^H \Psi$ (Θ est une matrice $s_r \times s_t$ avec des entrées i.i.d):

$$C = \sum_{i=1}^{n_t} \log_2(1 + \rho \xi_i r) + \sum_{i=1}^{n_r} \log_2(1 + \rho \eta_i q) - n_r q r$$

$$g(r, q) = \left[\frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} \left(\frac{\rho \eta_i}{1 + \eta_i \rho q} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} \left(\frac{\rho \xi_i}{1 + \xi_i \rho r} \right)^2 \right]$$

$$r = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} \frac{\rho \eta_i}{1 + \eta_i \rho q}$$

$$q = \frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} \frac{\rho \xi_i}{1 + \xi_i \rho r}$$

Validation par des mesures

Validation par des mesures

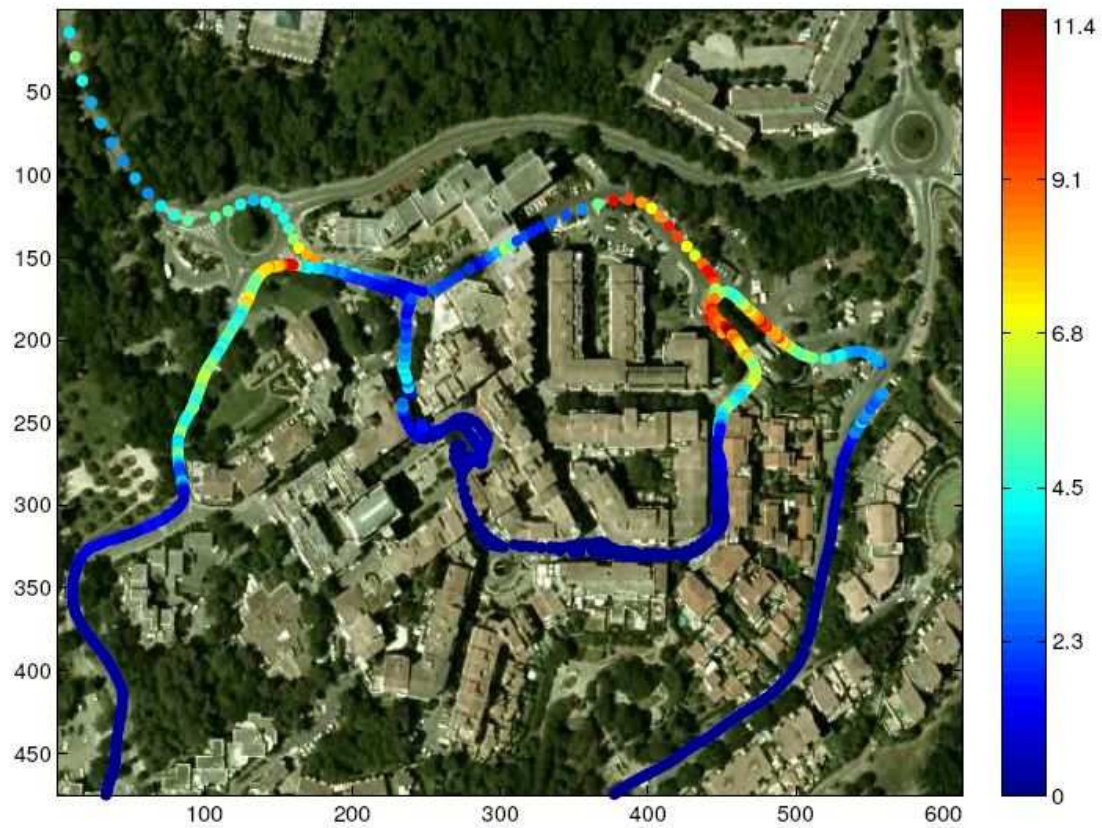


Figure 1.4: Mutual information of a 2x2 (dual polarized at the BS) MIMO system in an urban area for a SNR of 10 dB and constant transmit power.

Validation par des mesures

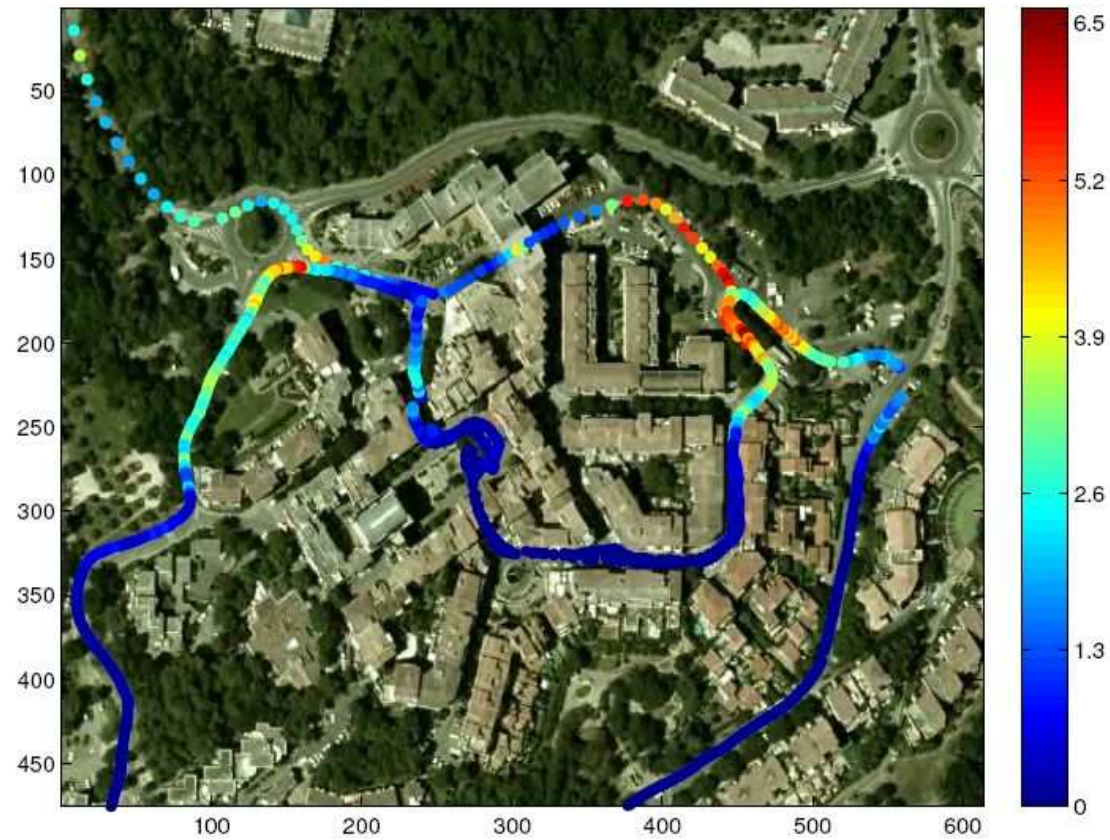


Figure 1.10: Mutual information of a 1x1 SISO system in an urban area for a SNR of 10 dB and constant transmit power.

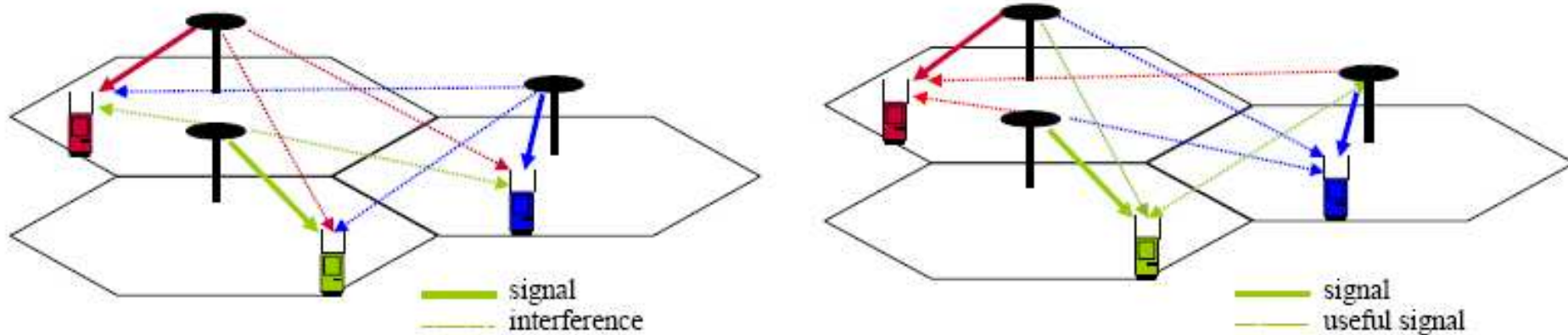
Les réseaux flexibles: du b/s/Hz au b/s/Hz/m^2

Les réseaux flexibles (ou réseaux aléatoires) ne considèrent pas les ressources radio comme un "gâteau à partager" entre les utilisateurs mais profitent du grand nombre d'interactions entre les terminaux pour accroître l'efficacité spectrale.

Plus de terminaux représente plus d'opportunités pour faire transiter l'information dans le réseau, ce qui accroît le débit global.

Les réseaux MIMO

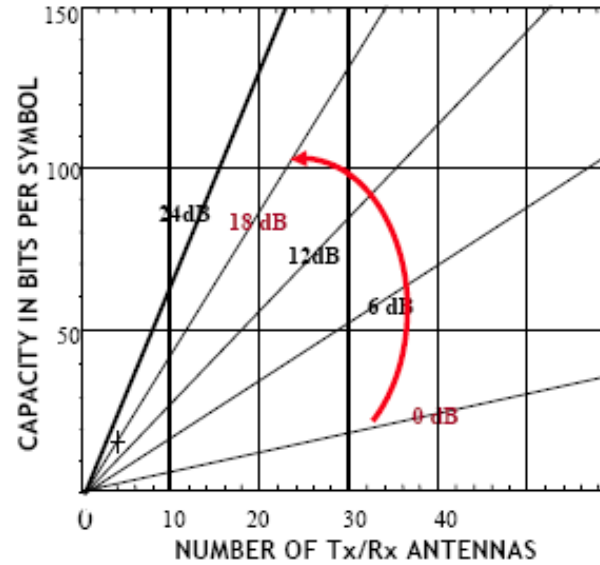
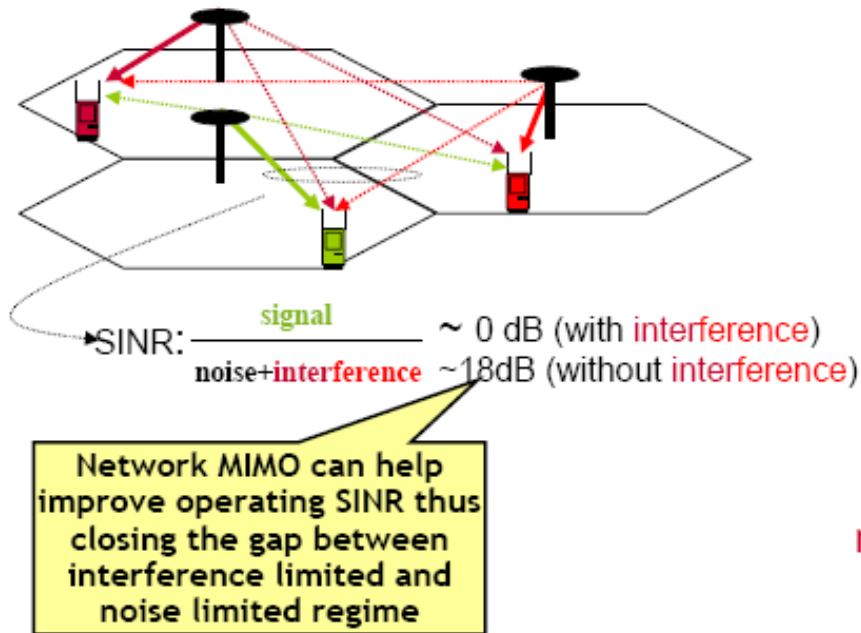
”Nous construisons trop de murs...pas assez de ponts”, Isaac Newton



Combattre l'interférence à travers le partage du spectre/contrôle de puissance.

Exploiter l'interference à travers la coopération et la coordination.

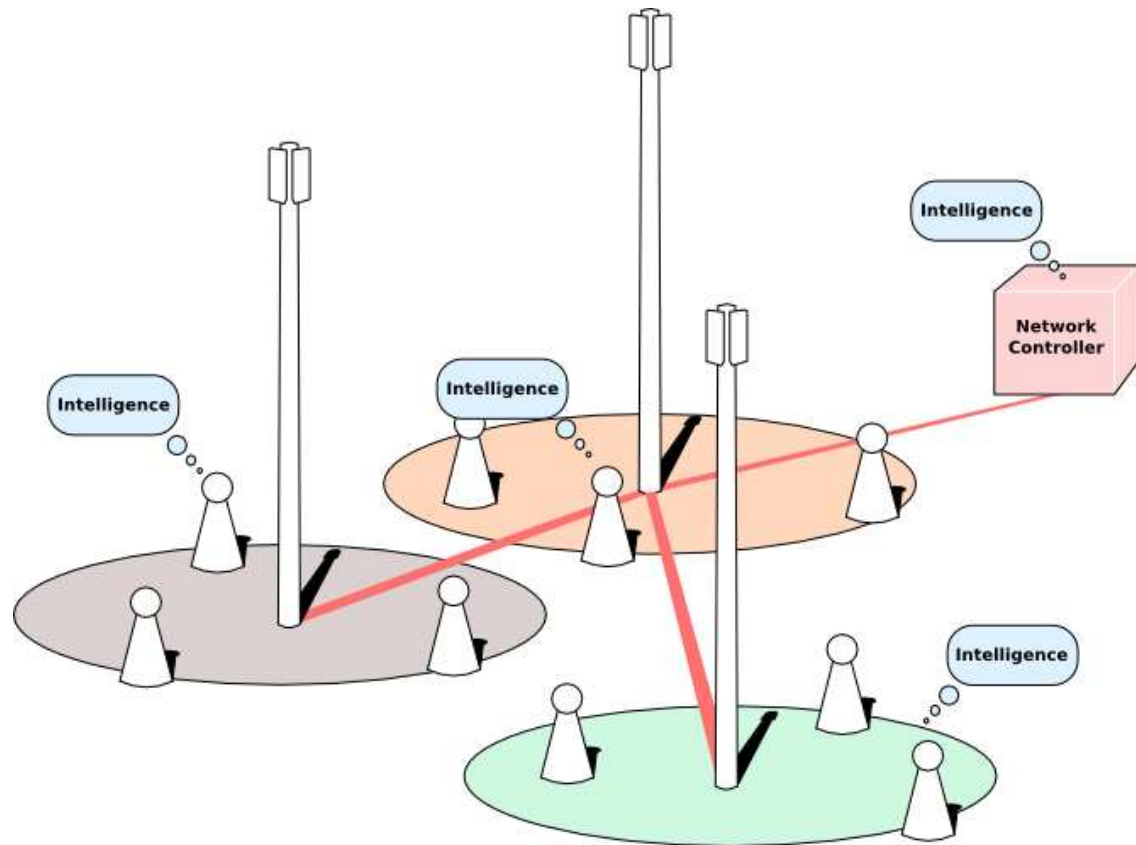
Les réseaux MIMO



Network MIMO can greatly improve the efficiency of multiple antennas in cellular networks.

En théorie, le seul facteur limitant sera le nombre de stations de base.

Réseaux MIMO Intelligent



C'est l'aléatoire dans le réseau qui amène les gains potentiels...nous devons exploiter cette opportunité et non la combattre!

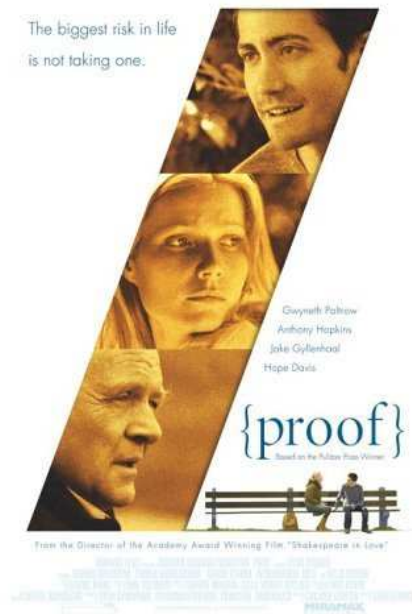
Pour cela, nous travaillons sur des modèles plus complexes (avec les outils adéquats pour les traiter)

Cours en ligne

<http://www.supelec.fr/d2ri/flexibleradio/cours.en.html>

- Course 1: **Overview and Historical development.**
- Course 2: **Probability and convergence measures review.**
- Course 3: **Basic Results on Random Matrix Theory**
- Course 4: **What about deterministic matrices?**
- Course 5: **Stieltjes Transform Method.**
- Course 6: **Results on Unitary Random Matrix Theory**
- Course 7: **The role of the Cauchy-Stieltjes transform in communications**
- Course 8: **Free probability theory and random matrices**
- Course 9: **Free deconvolution for signal processing applications**
- Course 10 **MIMO Channel Modelling and random matrices**
- Course 11: **Asymptotic analysis of (MC)-CDMA systems**
- Course 12: **Asymptotic Analysis of MIMO systems**
- Course 13: **Asymptotic design of receivers**
- Course 14: **Decoding order in receivers**
- Course 15: **Game theory and Random matrix theory**
- Course 16: **Asymptotic Analysis of Multi-hop relay channels**

Random Matrix Theory



Last Slide

THANK YOU!