

Aide multicritère à la décision  
*Concepts, méthodes et perspectives*

**Daniel VANDERPOOTEN**

LAMSADE - Université Paris Dauphine

ENS Cachan, 11 septembre 2008

# Plan

---

- Introduction
- Qu'est-ce qu'un critère ?
- Monocritère vs Multicritère
- Concepts élémentaires
- La somme pondérée
- Panorama des méthodes multicritères
- Quelques perspectives

# Introduction

---

**Définition :** *L'aide à la décision* est une approche **scientifique** des problèmes de décision qui se posent dans tout contexte socio-économique.

# Introduction

---

**Définition :** *L'aide à la décision* est une approche **scientifique** des problèmes de décision qui se posent dans tout contexte socio-économique.

→ 2 acteurs principaux :

# Introduction

---

**Définition :** *L'aide à la décision* est une approche **scientifique** des problèmes de décision qui se posent dans tout contexte socio-économique.

→ 2 acteurs principaux :

- le **décideur** dont les **préférences** sont censées régir le processus décisionnel

# Introduction

---

**Définition :** *L'aide à la décision* est une approche **scientifique** des problèmes de décision qui se posent dans tout contexte socio-économique.

→ 2 acteurs principaux :

- le **décideur** dont les **préférences** sont censées régir le processus décisionnel
- l'**homme d'étude** intervenant sur l'un au moins des 3 niveaux suivants :
  - **modélisation** du pb de décision
  - **conception** ou **adaptation** d'une procédure d'exploitation du modèle → solution(s)
  - élaboration d'une **prescription** à partir de la (des) solution(s)

# Introduction

---

## Domaines d'application de l'aide à la décision

1. Organisation d'une tournée de distribution
2. Elaboration du plan de production d'une usine
3. Constitution d'un portefeuille d'actions
4. Evaluation de dossiers de crédit
5. Choix de candidat pour un poste
6. Sélection de projets R& D

# Introduction

---

## Domaines d'application de l'aide à la décision

1. Organisation d'une tournée de distribution
2. Elaboration du plan de production d'une usine
3. Constitution d'un portefeuille d'actions
4. Evaluation de dossiers de crédit
5. Choix de candidat pour un poste
6. Sélection de projets R& D

+ généralement tout pb présentant à la fois un enjeu et une difficulté

# Introduction

---

## Domaines d'application de l'aide à la décision

1. Organisation d'une tournée de distribution (C)
2. Elaboration du plan de production d'une usine (C)
3. Constitution d'un portefeuille d'actions (C, I, M)
4. Evaluation de dossiers de crédit (I, M)
5. Choix de candidat pour un poste (M)
6. Sélection de projets R& D (I, M)

+ généralement tout pb présentant à la fois un enjeu et une difficulté

→ 3 types de difficultés : Combinatoire, Incertain, Multicritère

# Introduction

---

- Les difficultés **Combinatoires**  
explosion combinatoire (ex. 1)

# Introduction

---

- Les difficultés **Combinatoires**  
explosion combinatoire (ex. 1)
- Les difficultés liées à l'**Incertain**
  - mauvaise intuition humaine
  - limites des approches probabilistes

# Introduction

---

- Les difficultés **Combinatoires**

explosion combinatoire (ex. 1)

- Les difficultés liées à l'**Incertain**

- mauvaise intuition humaine
- limites des approches probabilistes

- Les difficultés **Multicritères**

les critères sont :

- souvent **conflictuels**
  - ⇒ la notion d'*optimum* perd ici toute signification → *compromis*
- souvent **incommensurables**
- parfois **qualitatifs** (avis d'expert,...)

# Introduction

---

## Quelques étapes-clé dans la phase de modélisation

### 1. Modélisation de l'ensemble des actions potentielles

L'ensemble  $A$  des *actions potentielles* (décisions, solutions, plans, variantes, candidats,...) peut être défini :

- **explicitement** (liste exhaustive) ou **implicitement** (par des propriétés caractéristiques)
- de façon **stable** ou **évolutive**
- de façon **globale** ou **fragmentée**

# Introduction

---

## 2. Choix d'une problématique

3 problématiques de référence :

- $P_\alpha$  : Choix

- $P_\beta$  : Tri

- $P_\gamma$  : Rangement

+ problématiques mixtes

# Introduction

---

## 2. Choix d'une problématique

3 problématiques de référence :

- $P_\alpha$  : Choix

- $P_\beta$  : Tri

- $P_\gamma$  : Rangement

+ problématiques mixtes

## 3. Construction du (des) critère(s)

→ évaluer l'intérêt des actions sur un ou plusieurs points de vue

# Introduction

---

4. Modèle **fermé** ou modèle **ouvert** ?

(a) hypothèses  $\Rightarrow$  pb mathématiquement bien défini

→ recherche de solutions (**optimales**)

(b) modèle  $\Rightarrow$  cadre formel de réflexion et d'investigation

→ révéler, construire, faire évoluer les préférences

→ recherche de solutions (**compromis**)

# Introduction

---

## 4. Modèle **fermé** ou modèle **ouvert** ?

(a) hypothèses  $\Rightarrow$  pb mathématiquement bien défini

→ recherche de solutions (**optimales**)

(b) modèle  $\Rightarrow$  cadre formel de réflexion et d'investigation

→ révéler, construire, faire évoluer les préférences

→ recherche de solutions (**compromis**)

● Des **choix** de modélisation... impactant fortement le type de méthodes à concevoir ou utiliser par la suite.

# Plan

---

- Introduction
- **Qu'est-ce qu'un critère ?**
- Monocritère vs Multicritère
- Concepts élémentaires
- La somme pondérée
- Panorama des méthodes multicritères
- Quelques perspectives

# Qu'est-ce qu'un critère ?

---

- attribut  $\neq$  critère
  - Un **attribut** est une caractéristique permettant de décrire chaque action.
  - Un **critère** doit permettre de mesurer les préférences du décideur vis-à-vis de chaque action, relativement à un point de vue. (ex: âge)

# Qu'est-ce qu'un critère ?

● attribut  $\neq$  critère

- Un **attribut** est une caractéristique permettant de décrire chaque action.
- Un **critère** doit permettre de mesurer les préférences du décideur vis-à-vis de chaque action, relativement à un point de vue. (ex: âge)

● Un critère est un modèle !

⇒ Un modèle d'AD est composé de 2 sous-modèles :

- le sous-modèle des actions (définition de  $A$ )
- le sous-modèle des préférences (un ou plusieurs critères)

# Qu'est-ce qu'un critère ?

**Définition :** Un *critère* est une fonction  $g : A \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  qui permet, relativement à un point de vue donné et pour un acteur identifié, de comparer deux actions qcq  $a$  et  $b$  :

$$g(b) \geq g(a) \Rightarrow bSa$$

où  $S$  : "est au moins aussi bon que"

(nous supposons ici que  $g$  est un critère à maximiser.)

# Comment utilise-t'on un critère ?

Un critère est souvent utilisé de la façon suivante (**vrai-critère**) :

$$\begin{cases} g(b) > g(a) & \iff bPa \\ g(b) = g(a) & \iff bIa \end{cases}$$

où  $P$ : préférence stricte et  $I$ : indifférence.

Propriétés de  $P$  et  $I$  ?

# Comment utilise-t'on un critère ?

Un critère est souvent utilisé de la façon suivante (**vrai-critère**) :

$$\begin{cases} g(b) > g(a) & \iff bPa \\ g(b) = g(a) & \iff bIa \end{cases}$$

où  $P$ : préférence stricte et  $I$ : indifférence.

Propriétés de  $P$  et  $I$  ?

$\Rightarrow g$  induit sur  $A$  un **préordre total**

structure « agréable » pour déterminer un choix, un tri ou un classement.

# Comment utilise-t'on un critère ?

Un critère est souvent utilisé de la façon suivante (**vrai-critère**) :

$$\begin{cases} g(b) > g(a) & \iff bPa \\ g(b) = g(a) & \iff bIa \end{cases}$$

où  $P$ : préférence stricte et  $I$ : indifférence.

Propriétés de  $P$  et  $I$  ?

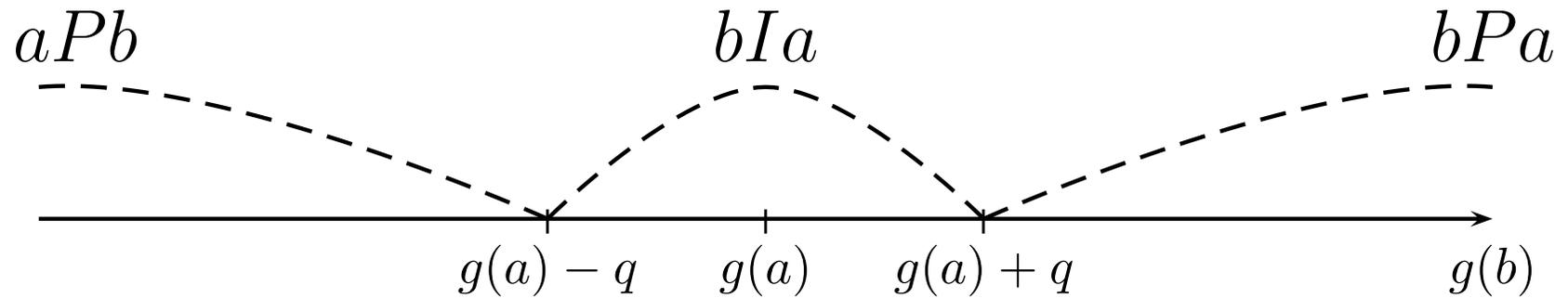
$\Rightarrow g$  induit sur  $A$  un **préordre total**

structure « agréable » pour déterminer un choix, un tri ou un classement.

Plusieurs difficultés éventuelles :

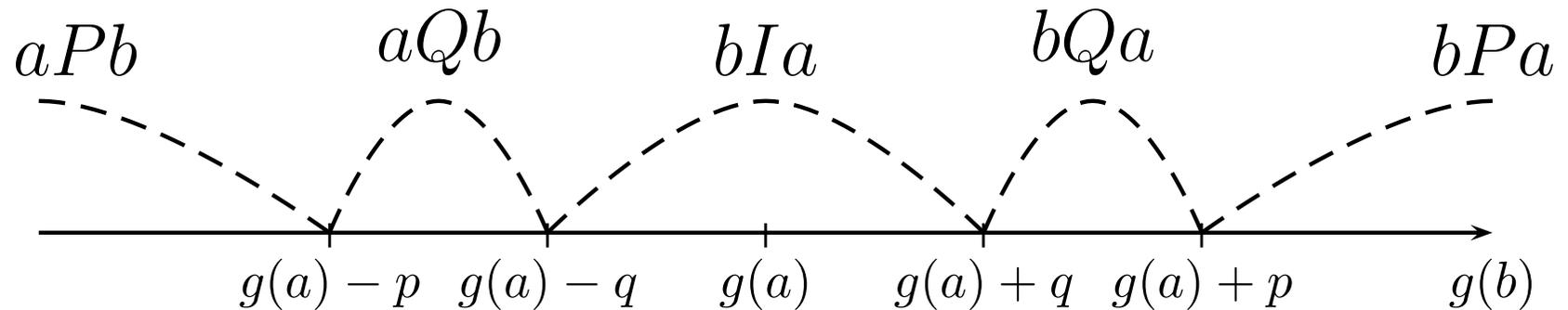
- transitivité de  $I$  (ex: café)
- pouvoir discriminant absolu
- passage abrupt de  $I$  à  $P$

# Quasi et pseudo critère



→ **quasi-critère** avec  $q$  : seuil d'indifférence ( $0 \leq q$ )

# Quasi et pseudo critère



quasi-critère avec  $q$  : seuil d'indifférence ( $0 \leq q$ )

→ **pseudo-critère** avec  $q$  et  $p$  : seuil de préférence  
( $0 \leq q \leq p$ )

# Plan

---

- Introduction
- Qu'est-ce qu'un critère ?
- **Monocritère vs Multicritère**
- Concepts élémentaires
- La somme pondérée
- Panorama des méthodes multicritères
- Quelques perspectives

# Monocritère vs Multicritère

---

**Monocritère** tout à fait adapté si :

- point de vue unique (ou prédominant)
- points de vue multiples non conflictuels (ex: tournées)

*Éventuellement* si :

- points de vue **conflictuels**

# Monocritère vs Multicritère

---

**Monocritère** tout à fait adapté si :

- point de vue unique (ou prédominant)
- points de vue multiples non conflictuels (ex: tournées)

*Éventuellement* si :

- points de vue **conflictuels**
- **Avantage** : définition simple de la prescription quelle que soit la problématique ( $P_\alpha$ ,  $P_\beta$  ou  $P_\gamma$ )

# Monocritère vs Multicritère

---

Si points de vue véritablement **conflictuels**  $\Rightarrow$  difficultés :

# Monocritère vs Multicritère

---

Si points de vue véritablement **conflictuels**  $\Rightarrow$  difficultés :

- critère exprimé dans une **unité de référence + ou - fictive** (équivalent **monétaire, utilité,...**)

$\Rightarrow$  peu interprétable/intelligible

# Monocritère vs Multicritère

---

Si points de vue véritablement **conflictuels**  $\Rightarrow$  difficultés :

- critère exprimé dans une **unité de référence + ou - fictive** (équt monétaire, utilité,...)  
 $\Rightarrow$  peu interprétable/intelligible
- son élaboration requiert l'agrégation de conséquences hétérogènes  
 $\Rightarrow$  **taux de conversion** discutables

# Monocritère vs Multicritère

---

Si points de vue véritablement **conflictuels**  $\Rightarrow$  difficultés :

- critère exprimé dans une **unité de référence + ou - fictive** (équt monétaire, utilité,...)  
 $\Rightarrow$  peu interprétable/intelligible
- son élaboration requiert l'agrégation de conséquences hétérogènes  
 $\Rightarrow$  **taux de conversion** discutables
- tendance + ou - consciente à évacuer aspects **qualitatifs**

# Monocritère vs Multicritère

→ Multicritère

Chaque catégorie homogène de points de vue  $\Rightarrow$  critère.

- critères + intelligibles
- coexistence de critères quantitatifs et qualitatifs
- pas de présupposé quant à la manière d'agrèger les critères
- mieux adapté aux contextes multi-décideurs

$\Rightarrow$  famille de critères  $g_1, \dots, g_p$  ( $p \geq 2$ )

• Difficulté : définition de la prescription pour chaque problématique ( $P\alpha$ ,  $P\beta$  ou  $P\gamma$ )

# Monocritère vs Multicritère

---

Monocritère → Pbs opérationnels, répétitifs,...

Multicritère → Pbs stratégiques, décideurs multiples,...

# Plan

---

- Introduction
- Qu'est-ce qu'un critère ?
- Monocritère vs Multicritère
- **Concepts élémentaires**
- La somme pondérée
- Panorama des méthodes multicritères
- Quelques perspectives

# Concepts élémentaires

Comment comparer 2 actions  $a$  et  $b$  selon  $p$  critères  $g_j$  ( $j = 1, \dots, p$ )?

## Dominance (forte)

•  $a$  domine  $b$  ( $a \Delta b$ ) ssi

$$g_j(a) \geq g_j(b) \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \text{ et } \exists k \in \{1, \dots, p\}, g_k(a) > g_k(b)$$

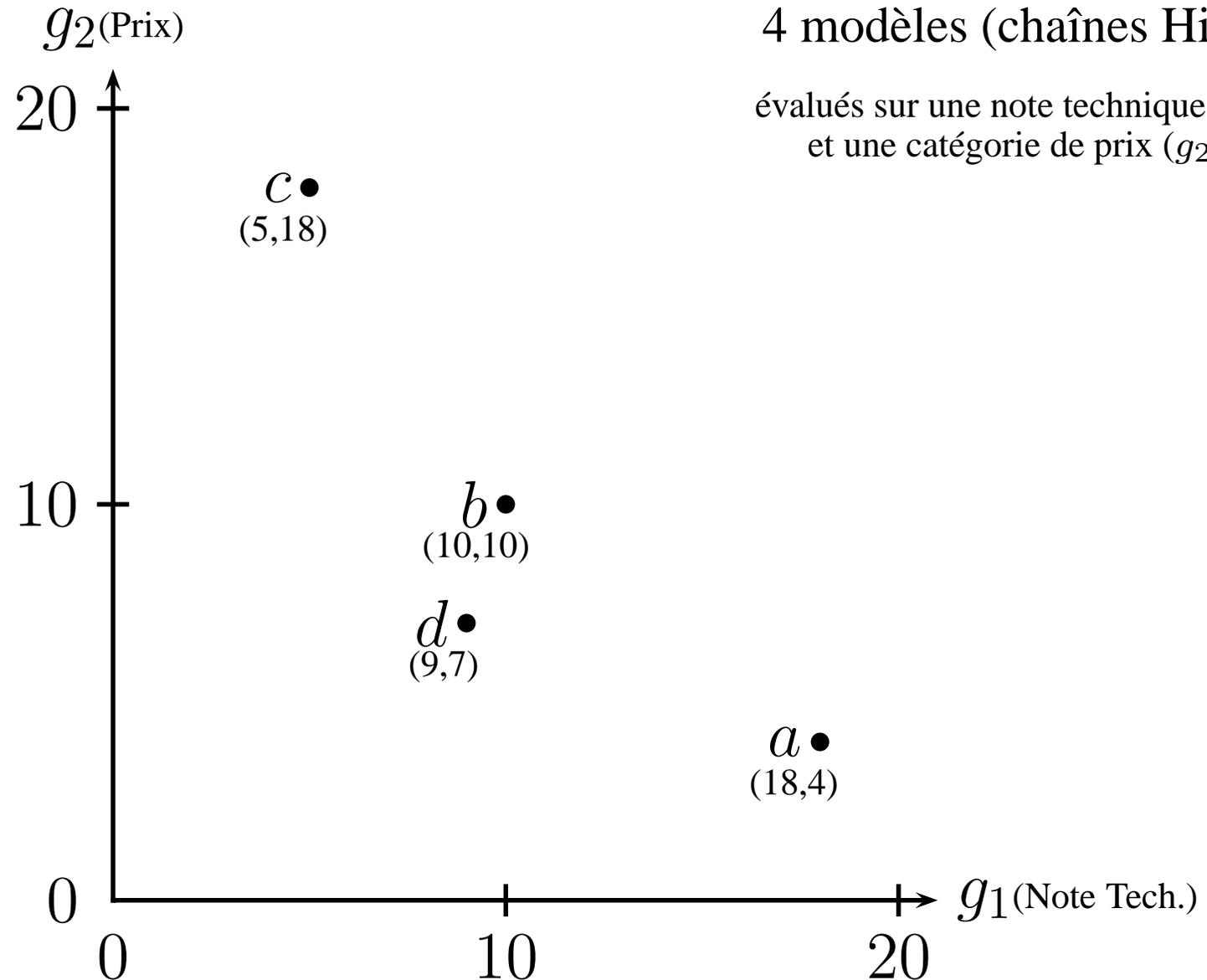
•  $a$  domine fortement  $b$  ssi

$$g_j(a) > g_j(b) \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}$$

## Efficacité

Une action est (faiblement) efficace s'il n'en existe aucune qui la domine (fortement).

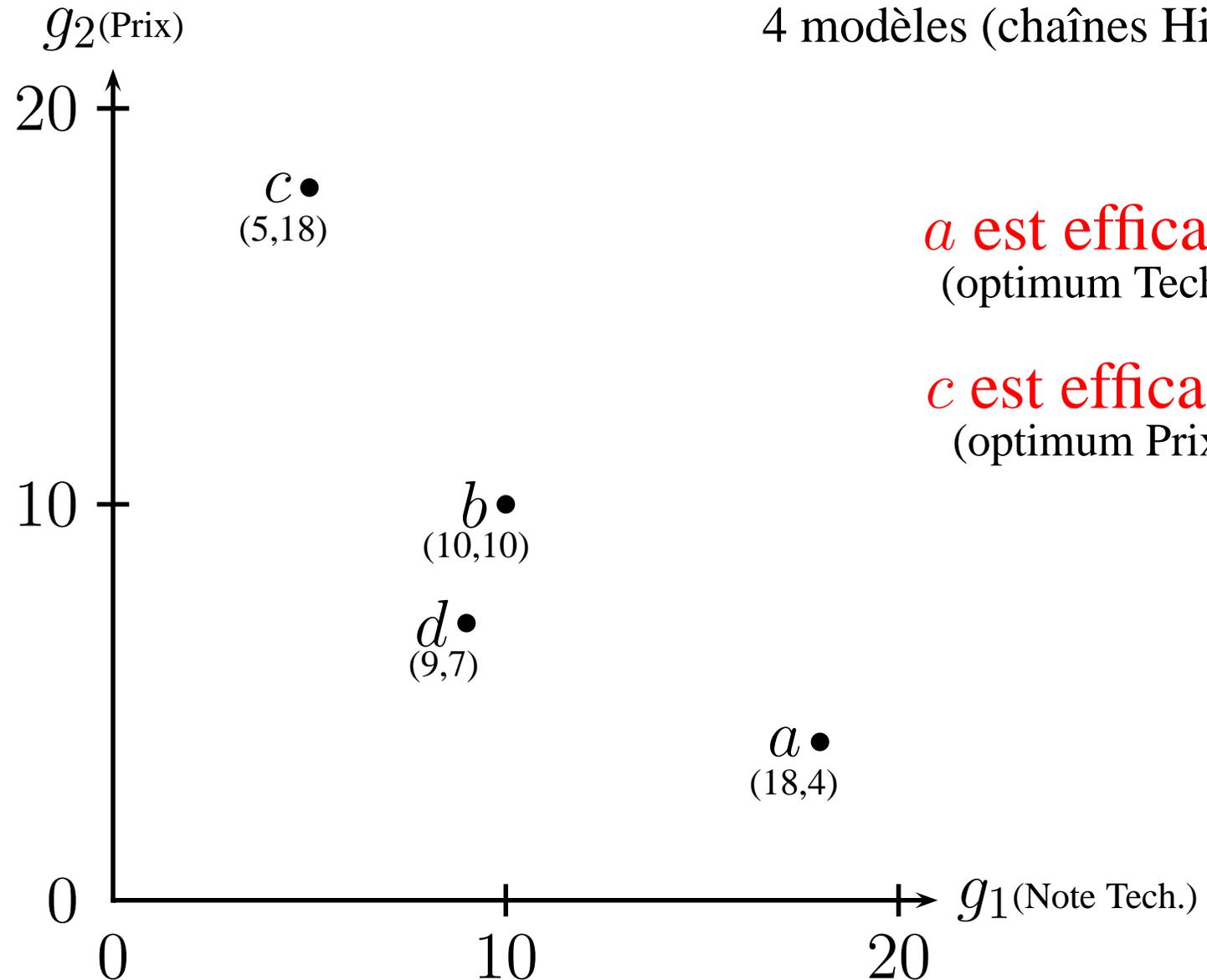
# Un exemple



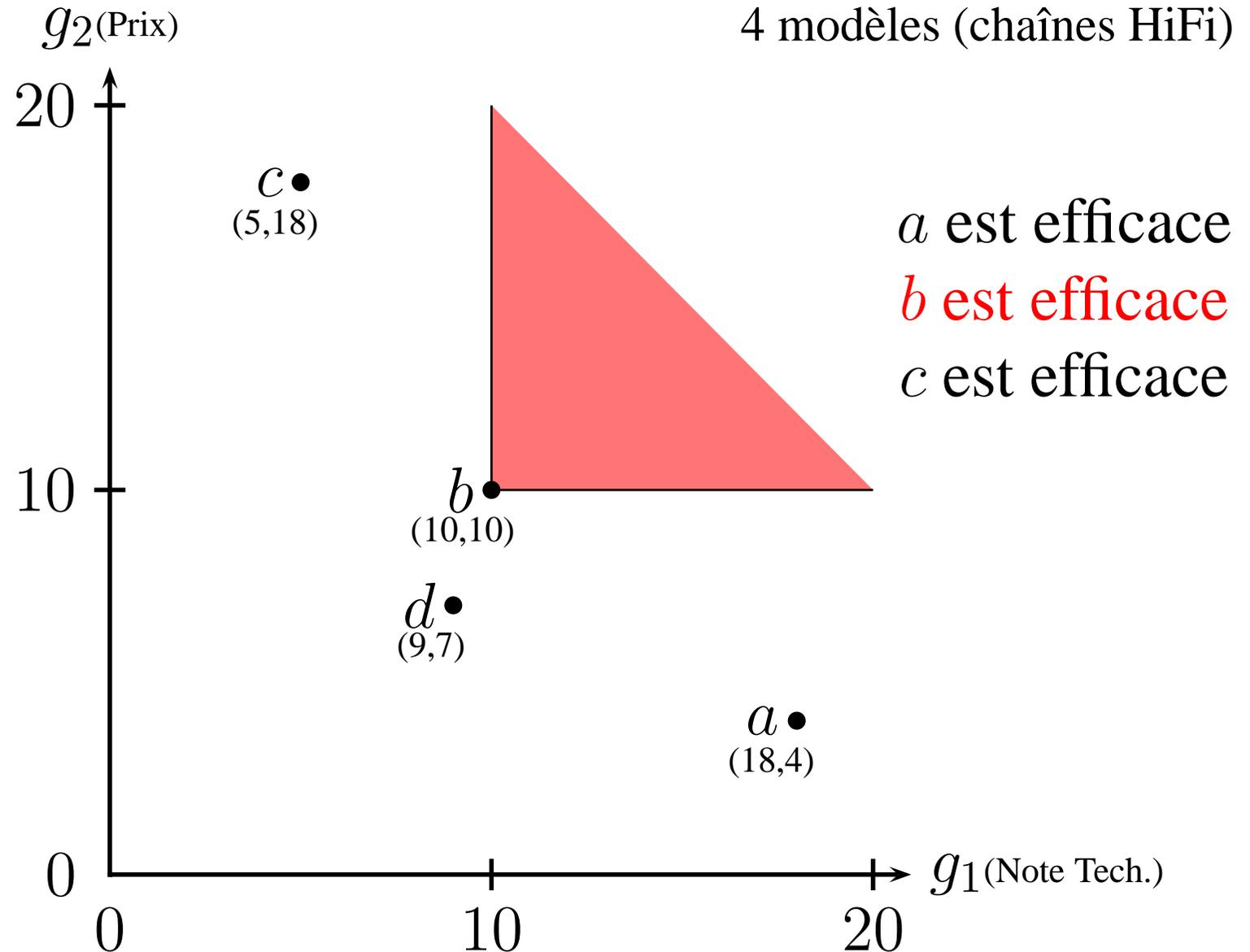
4 modèles (chaînes HiFi)

évalués sur une note technique ( $g_1$ )  
et une catégorie de prix ( $g_2$ )

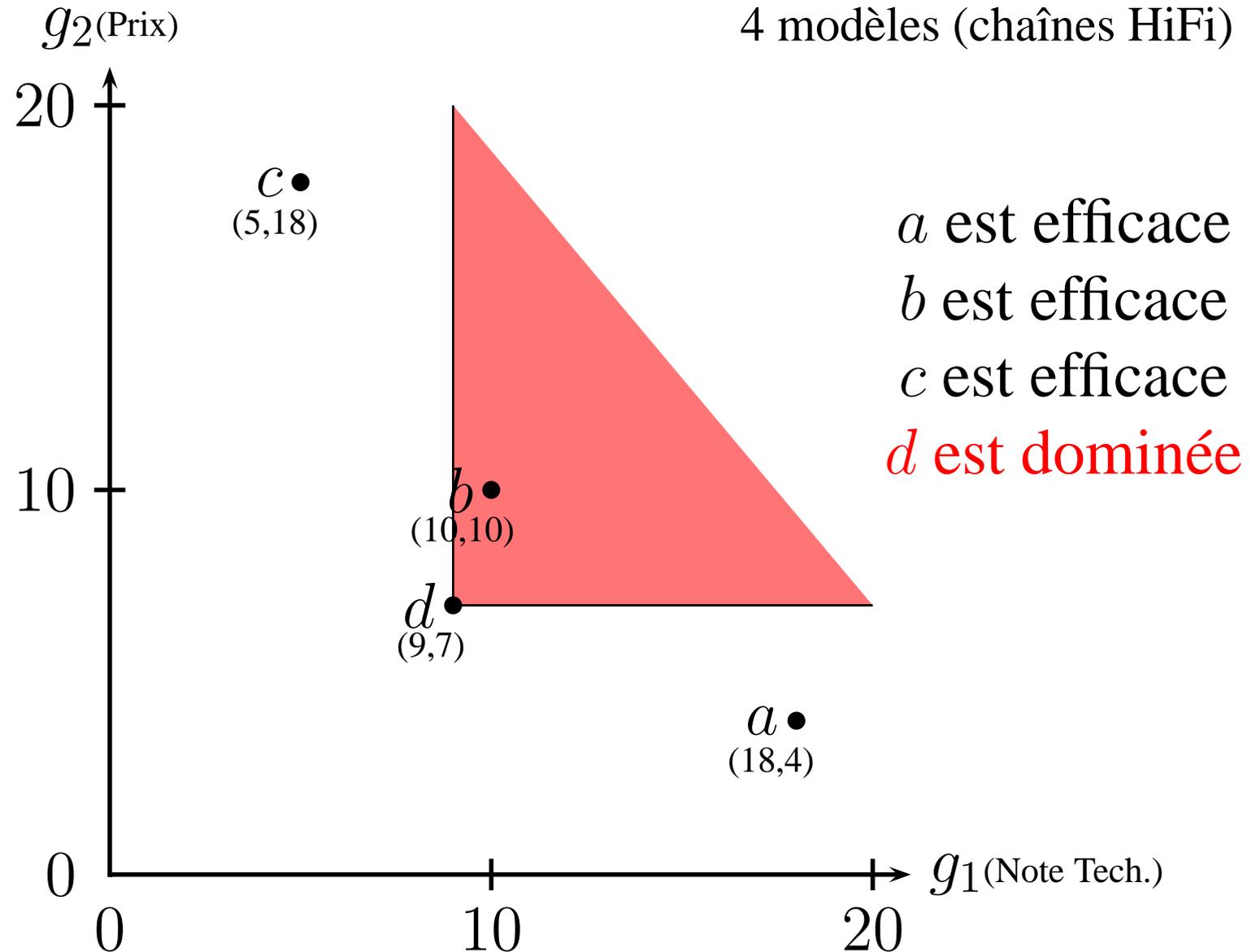
# Un exemple



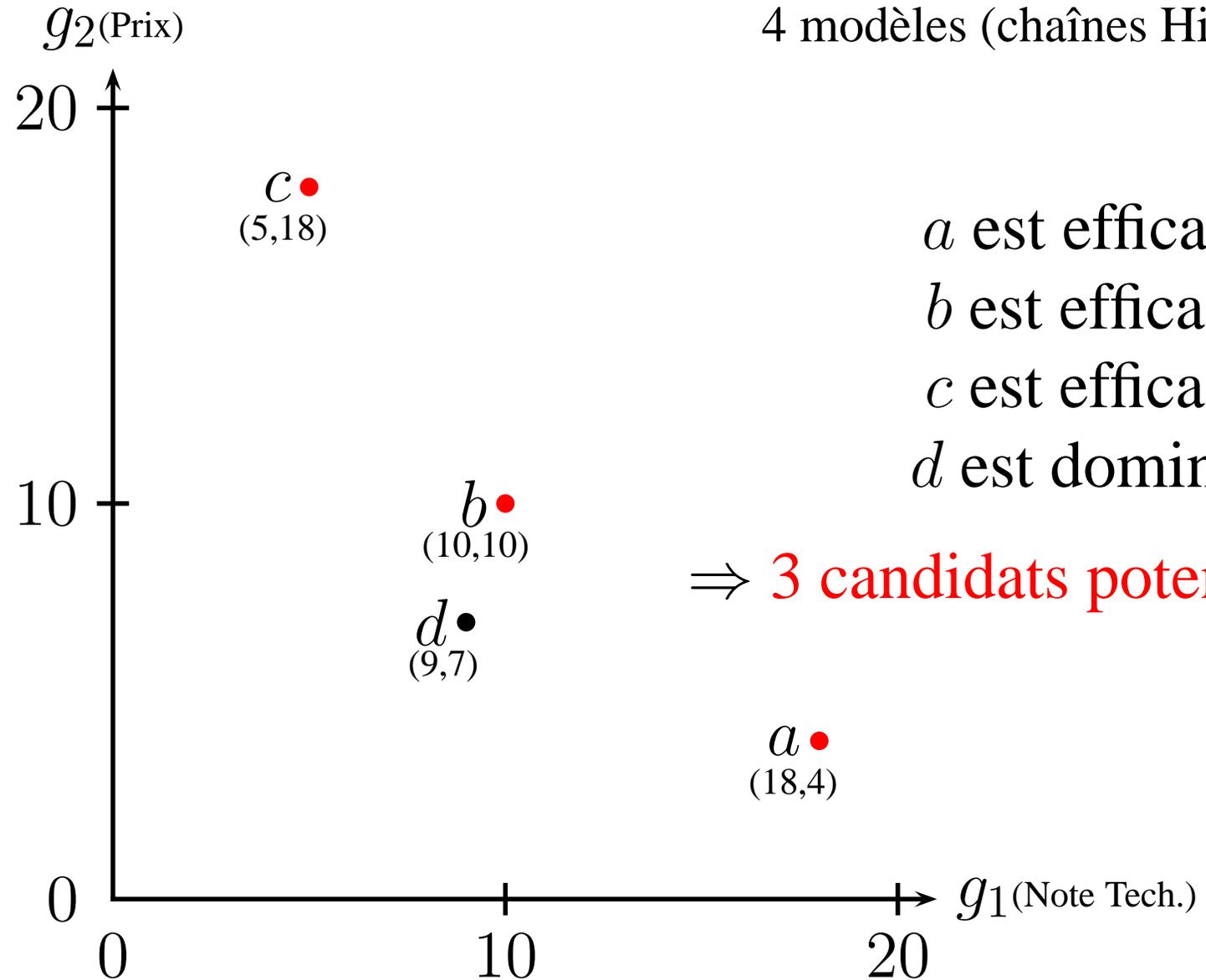
# Un exemple



# Un exemple



# Un exemple



4 modèles (chaînes HiFi)

$a$  est efficace  
 $b$  est efficace  
 $c$  est efficace  
 $d$  est dominée

$\Rightarrow$  3 candidats potentiels

# Comment progresser ?

---

1.  $\Delta$  est solidement établie mais en général **très pauvre**.
2. Le concept de solution **efficace**, généralisation formelle du concept de solution **optimale**, n'a pas du tout la même portée *prescriptive*.
3. Le concept de solution **efficace** n'est pas toujours pertinent (pbs de classement).

# Comment progresser ?

1.  $\Delta$  est solidement établie mais en général **très pauvre**.
2. Le concept de solution **efficace**, généralisation formelle du concept de solution **optimale**, n'a pas du tout la même portée *prescriptive*.
3. Le concept de solution **efficace** n'est pas toujours pertinent (pbs de classement).

(1.) et (2.)  $\rightarrow$   $\Delta$  ne prend pas parti dans les situations **conflictuelles** entre critères.

Pour cela, il faut :

- *faire exprimer* les **préférences** du décideur
- intégrer ces préférences au sein d'un **mécanisme d'agrégation**

2 démarches fondamentales :

- bâtir un **modèle global des préférences**

# Différentes approches multicritères

- Approches visant à bâtir un **modèle global des préférences**
  - forme analytique + ou - complexe  
→ critère de synthèse
  - une (ou plusieurs) relation(s) de préférence globale  
→ modèle relationnel ( $A \times A$ )
  - base de règles d'agrégation
- Approches **exploratoires interactives**  
(souvent fondées sur une forme analytique)

# Plan

---

- Introduction
- Qu'est-ce qu'un critère ?
- Monocritère vs Multicritère
- Concepts élémentaires
- **La somme pondérée**
- Panorama des méthodes multicritères
- Quelques perspectives

# La somme pondérée

---

## Définition

$$g(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$$

avec  $\lambda_j > 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) (et  $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ )

# La somme pondérée

---

## Définition

$$g(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$$

avec  $\lambda_j > 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) (et  $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ )

## Caractéristiques

- modèle très **simple** et **connu** de tous

# La somme pondérée

## Définition

$$g(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$$

avec  $\lambda_j > 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) (et  $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ )

## Caractéristiques

- modèle très **simple** et **connu** de tous
- *Propriété* La solution optimale d'une SP est **efficace**

# La somme pondérée

## Définition

$$g(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$$

avec  $\lambda_j > 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) (et  $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ )

## Caractéristiques

- modèle très **simple** et **connu** de tous
- *Propriété* La solution optimale d'une SP est **efficace**
- pour de nombreux pbs (combinatoires) **ne modifie pas la complexité** du pb sous-jacent

# La somme pondérée

## Définition

$$g(a) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$$

avec  $\lambda_j > 0$  ( $j = 1, \dots, p$ ) (et  $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ )

## Caractéristiques

- modèle très **simple** et **connu** de tous
- *Propriété* La solution optimale d'une SP est **efficace**
- pour de nombreux pbs (combinatoires) **ne modifie pas la complexité** du pb sous-jacent
- ... mais de nombreuses **limites**

# La somme pondérée : limites

---

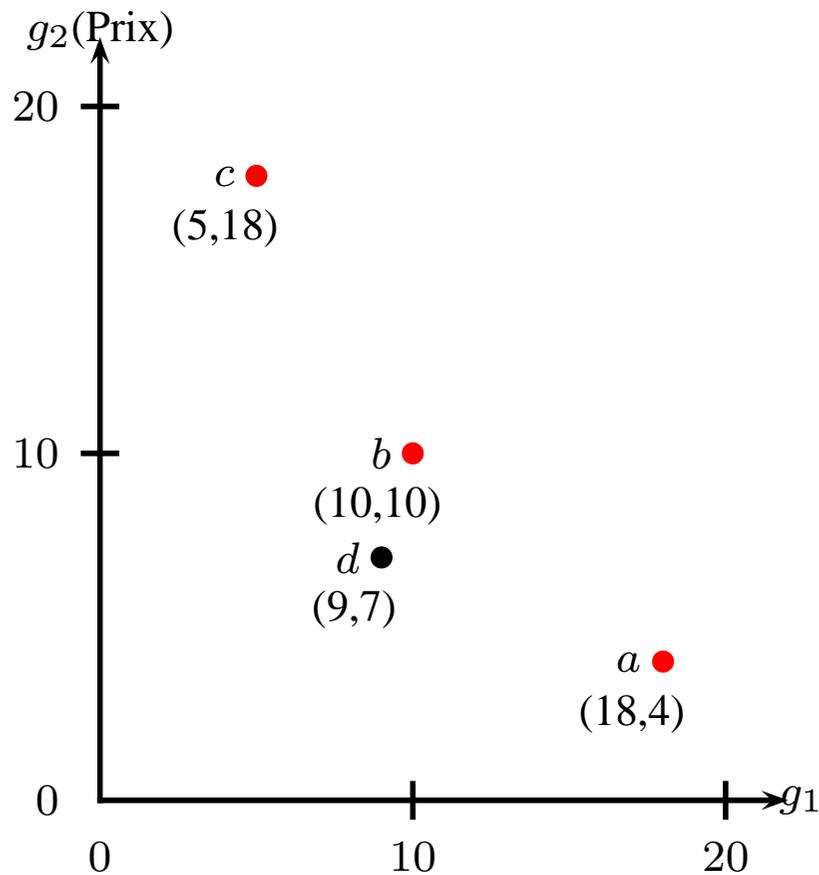
1. L'interprétation des **poids** n'est pas très claire car ils intègrent à la fois :
  - la notion d'*importance relative* des critères
  - un facteur de *normalisation* des échelles des critères.

# La somme pondérée : limites

1. L'interprétation des **poids** n'est pas très claire car ils intègrent à la fois :
  - la notion d'*importance relative* des critères
  - un facteur de *normalisation* des échelles des critères.
2. La logique d'agrégation sous-jacente est *totale*  
*compensatoire*.  
On préfère souvent utiliser des mécanismes d'agrégation *partiellement compensatoires*.

# La somme pondérée : limites

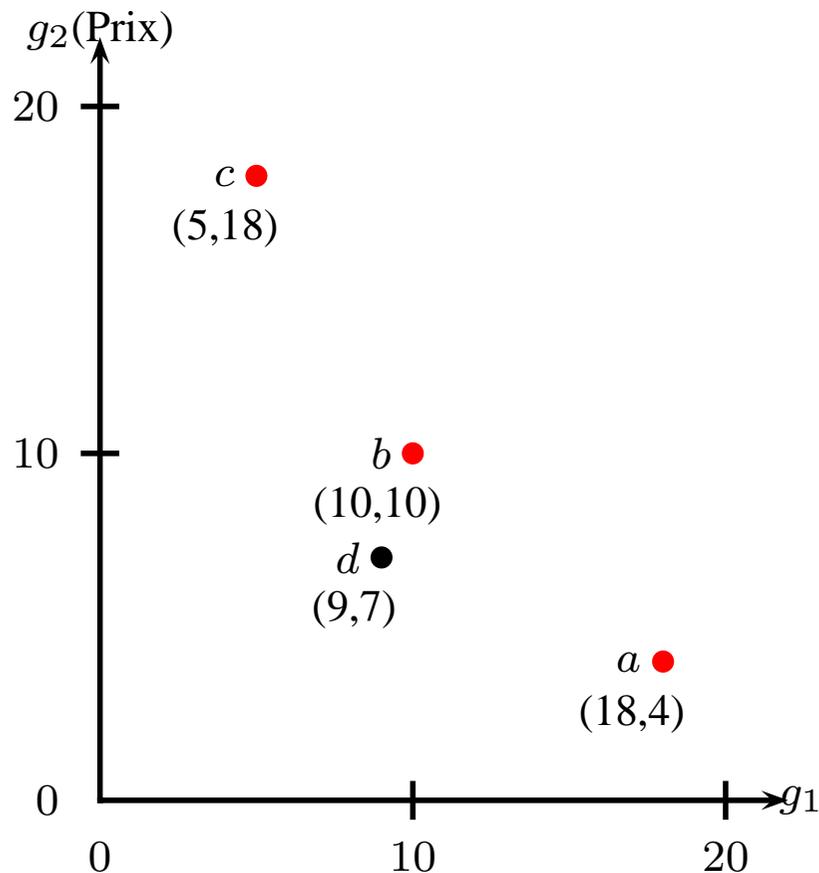
3. Pas de correspondance intuitive entre les valeurs des poids et la solution optimale proposée par SP.



Quelles valeurs de poids choisirait-on pour obtenir une solution **équilibrée** ?

# La somme pondérée : limites

3. Pas de correspondance intuitive entre les valeurs des poids et la solution optimale proposée par SP.



Quelles valeurs de poids choisirait-on pour obtenir une solution **équilibrée** ?

Avec  $\lambda_1 = 0,5$  et  $\lambda_2 = 0,5$  on obtient pour chacun des modèles efficaces :

$$g(a) = 0,5 \times 18 + 0,5 \times 4 = 11$$

$$g(b) = 0,5 \times 10 + 0,5 \times 10 = 10$$

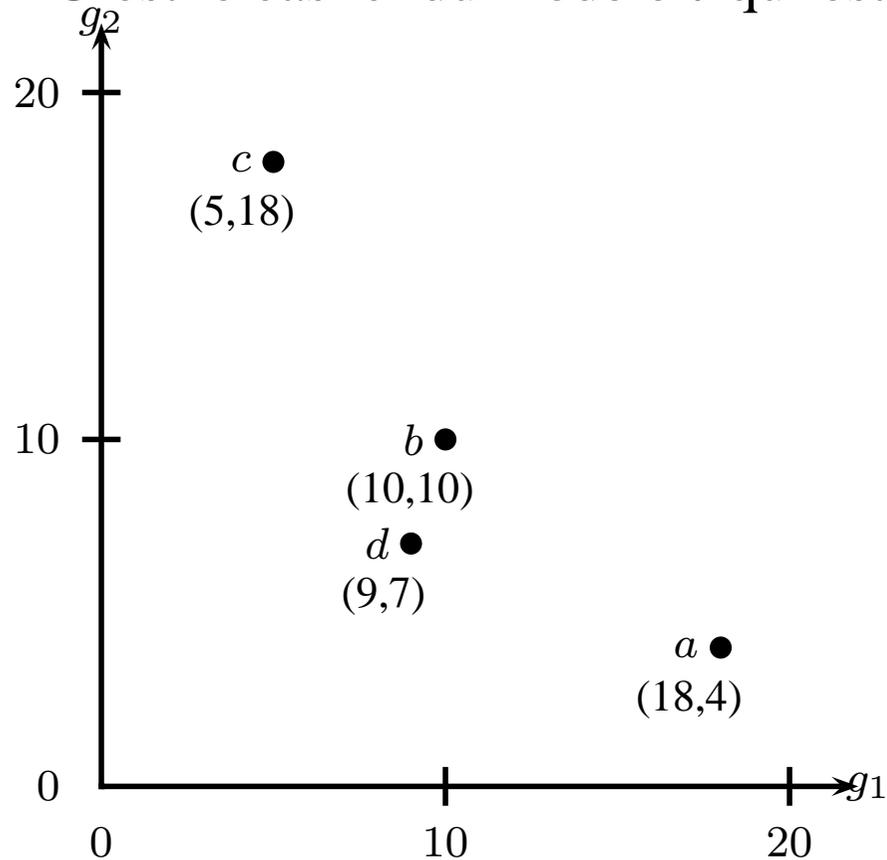
$$g(c) = 0,5 \times 5 + 0,5 \times 18 = 11,5 \leftarrow$$

SP désigne une solution très déséquilibrée alors que la seule solution équilibrée, le modèle  $b$ , est classée dernière !!!

# La somme pondérée : limites

4. Certaines solutions efficaces ne peuvent apparaître comme solutions optimales de SP, **quel que soit le jeu de poids choisi.**

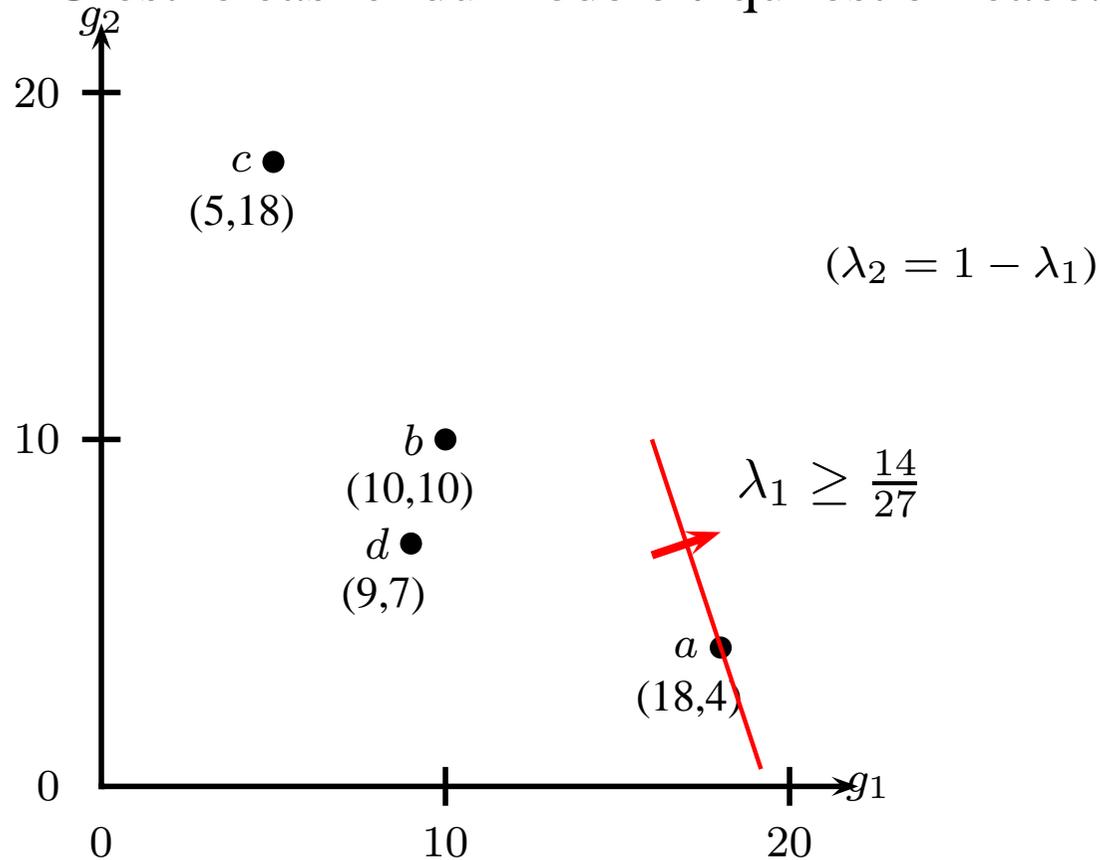
C'est le cas ici du modèle  $b$  qui est efficace.



# La somme pondérée : limites

4. Certaines solutions efficaces ne peuvent apparaître comme solutions optimales de SP, **quel que soit le jeu de poids choisi.**

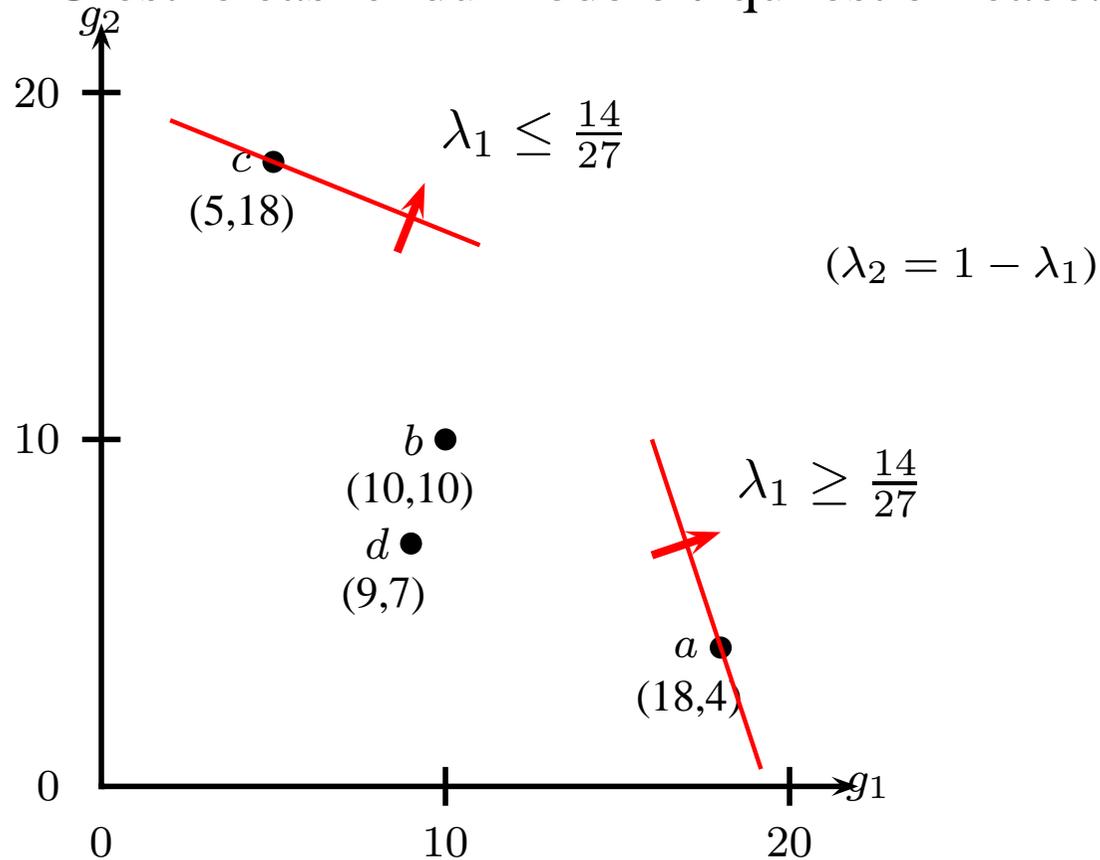
C'est le cas ici du modèle  $b$  qui est efficace.



# La somme pondérée : limites

4. Certaines solutions efficaces ne peuvent apparaître comme solutions optimales de SP, **quel que soit le jeu de poids choisi.**

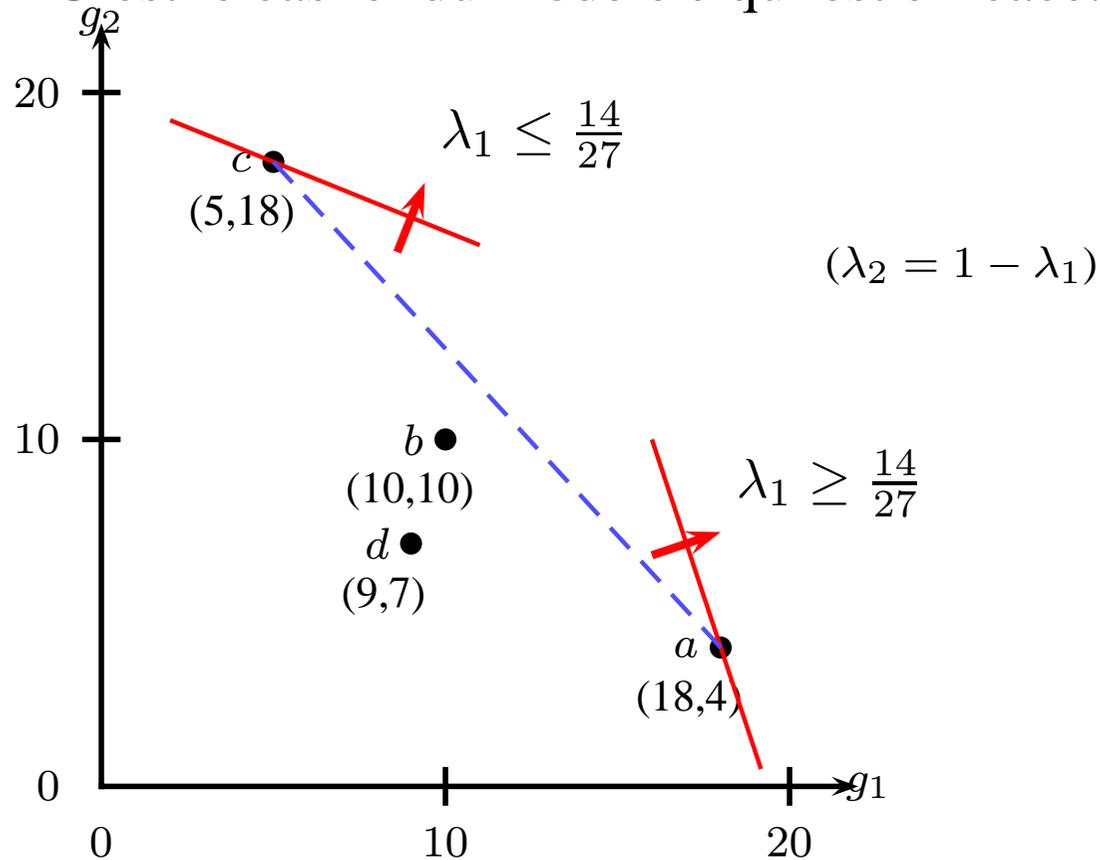
C'est le cas ici du modèle  $b$  qui est efficace.



# La somme pondérée : limites

4. Certaines solutions efficaces ne peuvent apparaître comme solutions optimales de SP, **quel que soit le jeu de poids choisi.**

C'est le cas ici du modèle  $b$  qui est efficace.

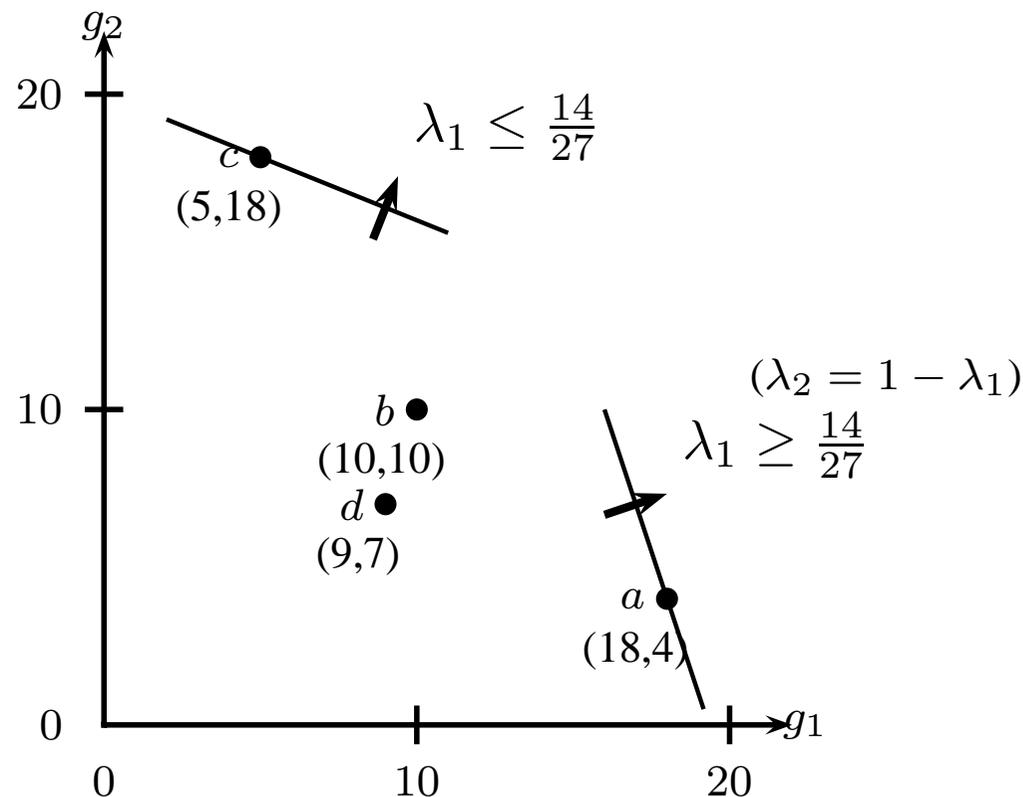


# La somme pondérée : limites

5. De très légères variations sur les valeurs des poids peuvent conduire à des solutions radicalement différentes.

$$\lambda_1 = 0,52; \lambda_2 = 0,48 \rightarrow a \text{ alors que } \lambda_1 = 0,51; \lambda_2 = 0,49 \rightarrow c$$

qui sont les modèles les plus dissemblables !!!



# Plan

---

- Introduction
- Qu'est-ce qu'un critère ?
- Monocritère vs Multicritère
- Concepts élémentaires
- La somme pondérée
- **Panorama des méthodes multicritères**
- Quelques perspectives

# Approche du critère unique de synthèse

$$g(a, \omega) = \mathcal{A}(g_1(a), \dots, g_p(a), \omega)$$

où  $\omega$  paramètre(s) préférentiel(s)

- somme pondérée :  $g(a, \lambda) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$
- agrégation additive :  $g(a, \lambda) = \sum_{j=1}^p \lambda_j v_j(g_j(a))$
- formes + complexes : multiplicative, avec termes d'interaction, ... (synergie)
- *pseudo-distance* :  $g(a, \bar{g}) = \max_{j=1..p} \{ \lambda_j (\bar{g}_j - g_j(a)) \}$   
(min)

# Approche du critère unique de synthèse

● Comment choisir  $g(a, \omega) = \mathcal{A}(g_1(a), \dots, g_p(a), \omega)$  ?

$$(P) : \text{Opt}_{a \in A, \omega \in \Omega} g(a, \omega)$$

3 exigences techniques importantes :

- (E1) Toute solution optimale de (P) est efficace
- (E2) Toute solution efficace peut apparaître comme solution optimale de (P) (pour au moins une valeur de  $\omega$ )
- (E3) La résolution de (P) doit être relativement facile.

Idéalement, même complexité que le pb sous-jacent :  $\text{Opt}_{a \in A} g_j(a)$ .

pertinent pour PL, pbs classiques faciles en OC (chemin, arbre couvrant, flot,...)

# Approche du critère unique de synthèse

● Comment choisir  $g(a, \omega) = \mathcal{A}(g_1(a), \dots, g_p(a), \omega)$  ?

$$(P) : \text{Opt}_{a \in A, \omega \in \Omega} g(a, \omega)$$

3 exigences techniques importantes :

- (E1) Toute solution optimale de (P) est efficace
- (E2) Toute solution efficace peut apparaître comme solution optimale de (P) (pour au moins une valeur de  $\omega$ )
- (E3) La résolution de (P) doit être relativement facile.

Idéalement, même complexité que le pb sous-jacent :  $\text{Opt}_{a \in A} g_j(a)$ .

pertinent pour PL, pbs classiques faciles en OC (chemin, arbre couvrant, flot,...)

● somme pondérée :  $g(a, \lambda) = \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(a)$

(E1): OUI, (E2): NON, (E3): OUI

● *pseudo-distance* :  $g(a, \bar{g}) = \max_{j=1..p} \{ \lambda_j (\bar{g}_j - g_j(a)) \}$  (min)

(E1): presque, (E2): OUI, (E3): OUI pour PL, NON pour pbs faciles en OC

# Approche du critère unique de synthèse

De nombreuses méthodes : Goal Programming, Compromise Programming, UTA, AHP, MAUT,...

## Remarques :

- applicable aux cas où  $A$  est défini implicitement (PLMO) ou explicitement
- $\neq$  monocritère - on a construit  $\{g_1, \dots, g_p\}$
- $\rightarrow$  modèle **semi-fermé**
- Le critère (modèle)  $g$  permet de comparer de façon **complète** et **transitive** les actions de  $A$
- $\Rightarrow$  construction de la prescription « facile »

# Approche relationnelle de synthèse

## Principe général

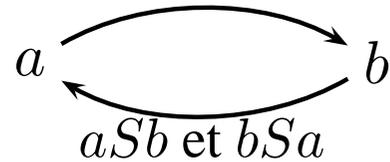
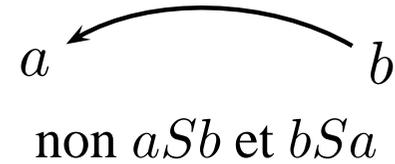
Construire une relation binaire de préférence entre tout couple d'actions  $a$  et  $b$ .  
On dira que  $aSb$  ( $a$  surclasse  $b$ ) est établi si on a des raisons suffisamment fortes d'accepter l'assertion suivante :

«  $a$  est au moins aussi bon que  $b$  »

Les raisons pour accepter  $aSb$  sont fondées sur:

- les profils de performance des deux actions :  
 $(g_1(a), \dots, g_p(a))$  et  $(g_1(b), \dots, g_p(b))$
- l'information préférentielle (poids, seuils).

4 cas :



Indifférence

Incomparabilité

Afin d'établir l'assertion  $aSb$ , on s'appuiera sur les deux principes fondamentaux suivants :

**Principe de concordance :** Une majorité de critères, compte-tenu de leur importance, doit supporter l'assertion  $aSb$   
(principe **majoritaire**)

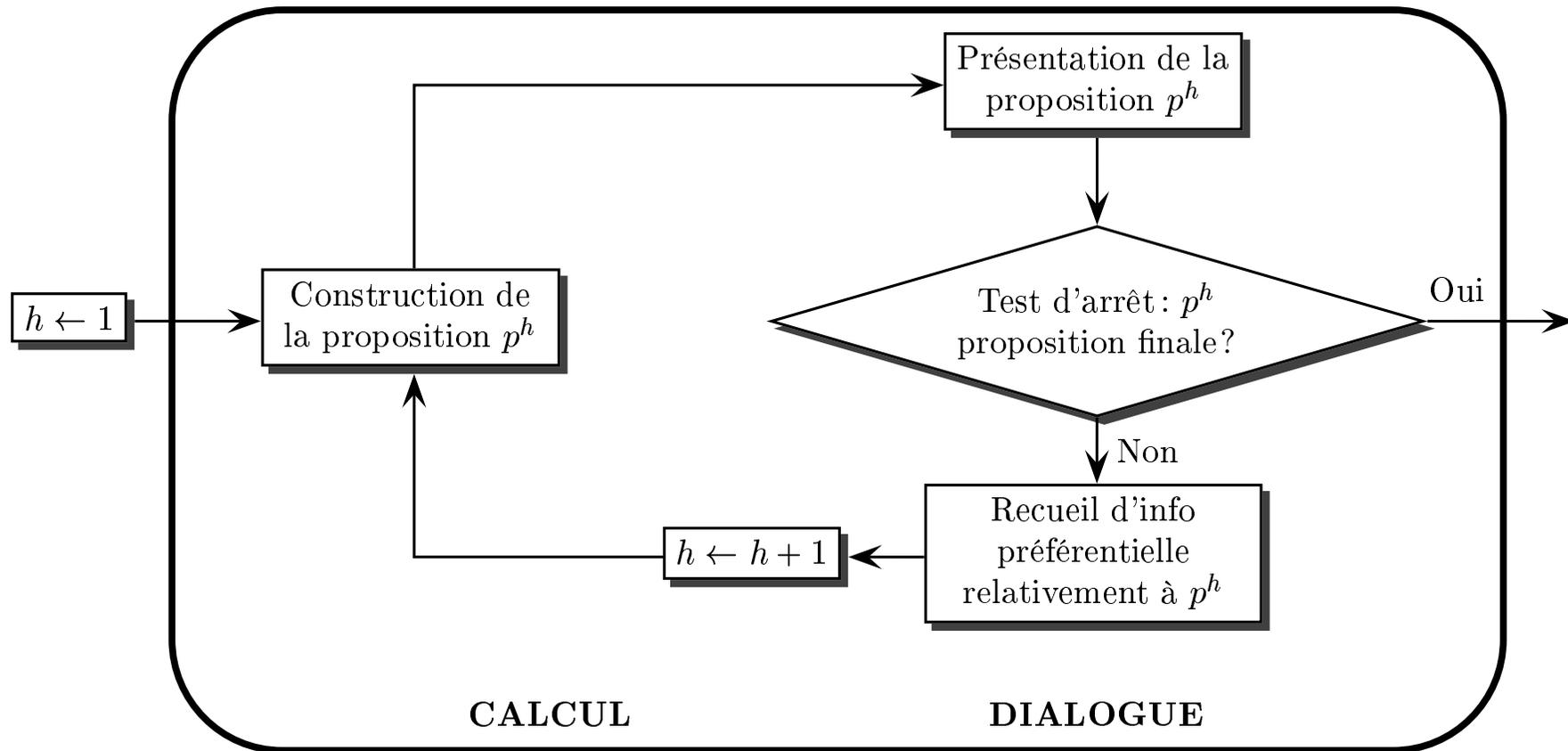
**Principe de non discordance :** Parmi les critères qui ne supportent pas l'assertion  $aSb$ , aucun ne doit exprimer un désaccord trop fort  
(principe de **respect des minorités**).

De nombreuses méthodes : Electre, Promethee, Oreste, Melchior,...

### Remarques :

- applicable au cas où  $A$  est défini explicitement (liste)
- $S$  peut être perçue comme un enrichissement de la relation de dominance (on a toujours  $S \supseteq \Delta$ )
- $S$  n'a pas de *bonnes* propriétés (ni complète, ni transitive)
- $\rightarrow$  accent sur la modélisation des préférences (incomparabilité, agrégation non totalement compensatoire)
- $\Rightarrow$  construction de la prescription « non immédiate ».

# Approche interactive



# Approche interactive

---

## Remarques :

- applicable aux cas où  $A$  est défini implicitement (PLMO) ou explicitement (mais vaste)
- choix de la fonction d'agrégation  
(bonne caractérisation des sol. efficaces, résolution)
- $\neq$  conceptions  
(orientée recherche, apprentissage, mixte)
- définition du protocole d'interaction  
(type d'info, modes de dialogue)

De nombreuses méthodes : STEM, GDF, ZW, Steuer, Wierzbicki,...

# Plan

---

- Introduction
- Qu'est-ce qu'un critère ?
- Monocritère vs Multicritère
- Concepts élémentaires
- La somme pondérée
- Panorama des méthodes multicritères
- Quelques perspectives

# Quelques perspectives

---

- Prise en compte d'information ordinale
- Problèmes combinatoires multi-objectifs
- Analyse de robustesse

# Prise en compte d'information ordinale

Les informations que l'on manipule (critères qualitatifs, paramètres) n'ont souvent qu'une valeur ordinale.

Comment agréger ces informations correctement (de façon **signifiante**) ?

Une voie intéressante :

→ **règles d'agrégation** « si ... alors ... »

- $\neq$  logiques d'agrégation (absorption, compensation)
- interprétables, pouvoir explicatif
- vérification de conditions de **cohérence** (exhaustivité, exclusivité, non-dominance) PL en 0-1.

# Prise en compte d'information ordinale

---

## Enjeux

- Développer des méthodes d'agrégation ordinale significantes

## Applications

- Programmation de la maintenance du parc hydraulique (EDF)
- Construction d'un critère « impact sur l'environnement » pour le choix de contre-mesures en cas de crues centennales (Loire)

# Problèmes combinatoires multi-objectif

---

$$\begin{cases} \min f_k(x) = \sum_{i=1}^t c_i^k x_i & (k = 1, \dots, p) \\ x \in X = X' \cap \{0,1\}^t \\ c_i^k > 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

# Problèmes combinatoires multi-objectif

$$\begin{cases} \min f_k(x) = \sum_{i=1}^t c_i^k x_i & (k = 1, \dots, p) \\ x \in X = X' \cap \{0,1\}^t \\ c_i^k > 0, \text{ entiers} \end{cases}$$

1. **Arbre couvrant**
2. **Plus Court Chemin**
3. **Affectation**
4.  **$s$ - $t$  Coupe Minimale**
5. **Sac à dos**
6. **TSP**

• pbs + ou - difficiles en monocritère,... et en multicritère?

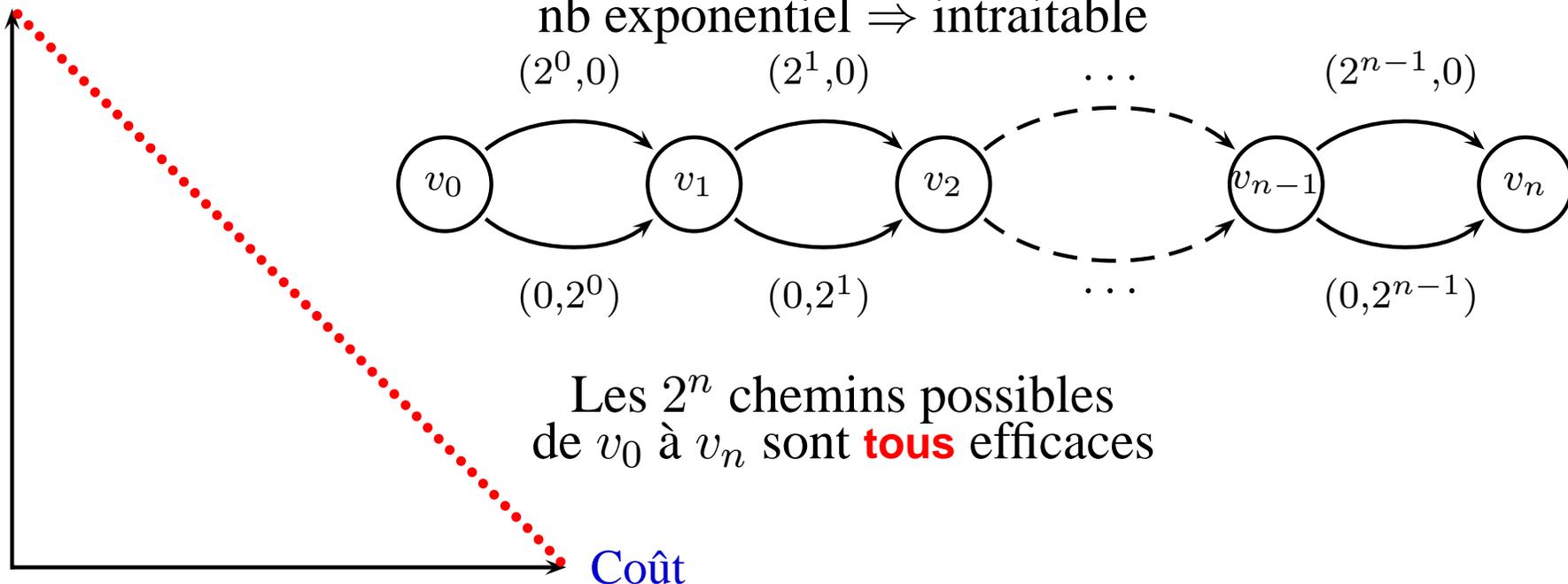
# Problèmes combinatoires multi-objectifs

Pb : génération de l'ensemble des solutions efficaces (frontière efficace)

Difficulté : taille de cette frontière (parfois exponentielle)

Ex: **Plus court Chemin Bi-critère** (Coût, Durée)

Durée



# Problèmes combinatoires multi-objectifs

→ approximation de la frontière efficace

- Qu'est-ce qu'une *bonne* approximation de cette frontière ?
- Comment la construire ?

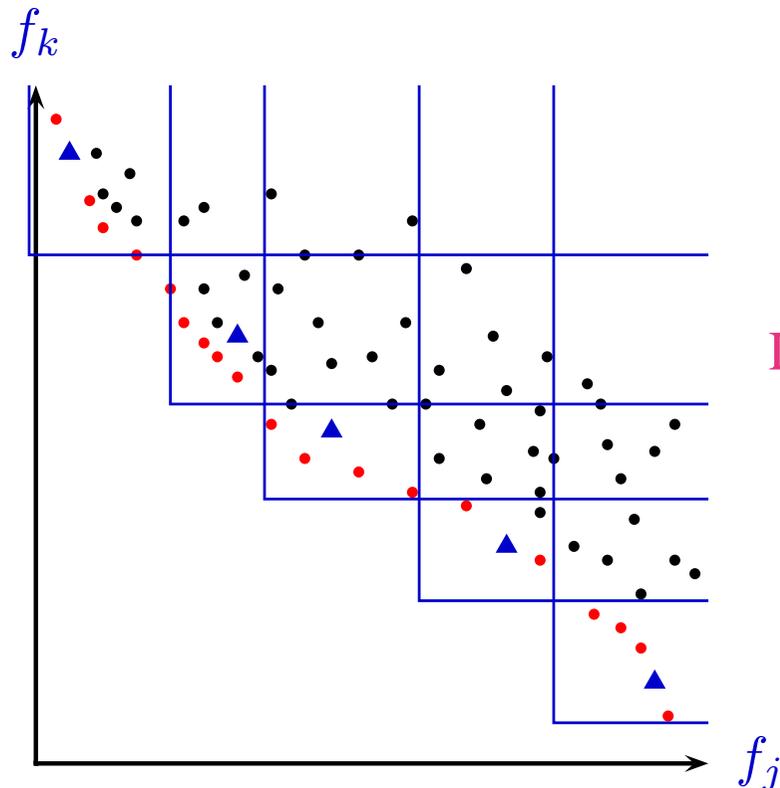
2 types d'approches :

- métaheuristiques (AG, RS, Tabou,...) → approximation empirique  
très nombreux travaux opérationnels mais souvent difficiles à apprécier  
(pas de garantie formelle)
- algorithmes d'approximation fondés sur une relation d' $\varepsilon$ -dominance :  
 $x \Delta_\varepsilon y$  ssi  $f_k(x) \leq f_k(y)(1 + \varepsilon)$  ( $k = 1, \dots, p$ )  
travaux plus épars Warburton (88), Papadimitriou Yannakakis (00)  
résultats théoriques intéressants mais peu opérationnels.

# Problèmes combinatoires multi-objectifs

**Définition :** Une  $\varepsilon$ -approximation est tout ensemble  $A_\varepsilon$  vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists y \in A_\varepsilon \text{ t.q. } y \Delta_\varepsilon x$$

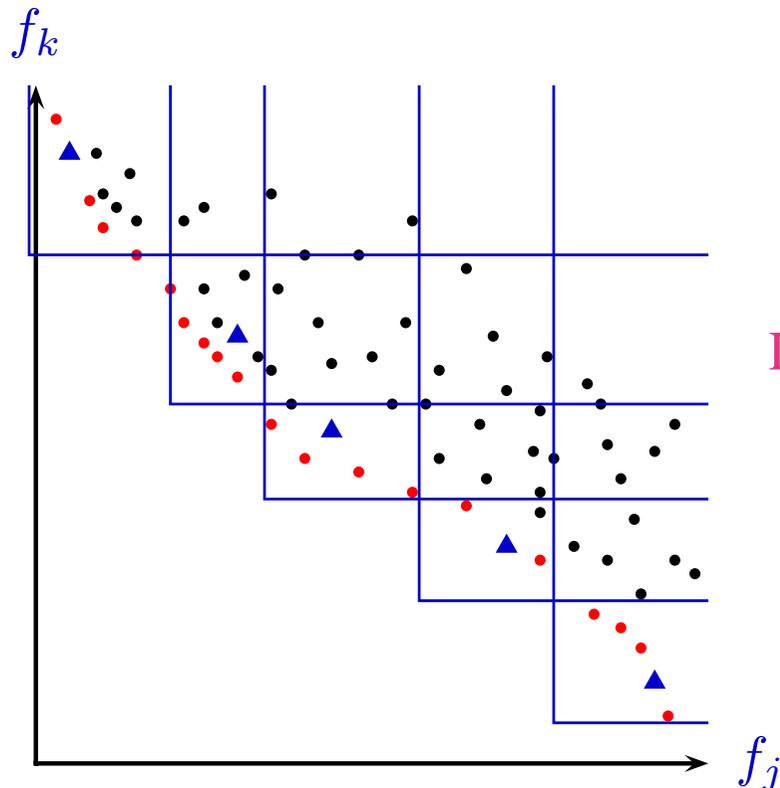


De nombreuses  $\varepsilon$ -approximations possibles

# Problèmes combinatoires multi-objectifs

**Définition :** Une  $\varepsilon$ -approximation est tout ensemble  $A_\varepsilon$  vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists y \in A_\varepsilon \text{ t.q. } y \Delta_\varepsilon x$$



De nombreuses  $\varepsilon$ -approximations possibles

Th [Papadimitriou, Yannakakis'00]: Pour tout pb multi-objectif et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $\varepsilon$ -approximation de taille poly en  $|I|$  et  $\frac{1}{\varepsilon}$

# Problèmes combinatoires multi-objectifs

---

## Enjeux

- Algorithmes d'approximation opérationnels **avec** garantie formelle (qualité du résultat et temps)
- Algorithmes exacts performants

## Applications

- Planification multicritère de prises de vue par satellite
- Routage sécurisé bicritère (coût/délai) dans des réseaux (France Telecom)

# Robustesse

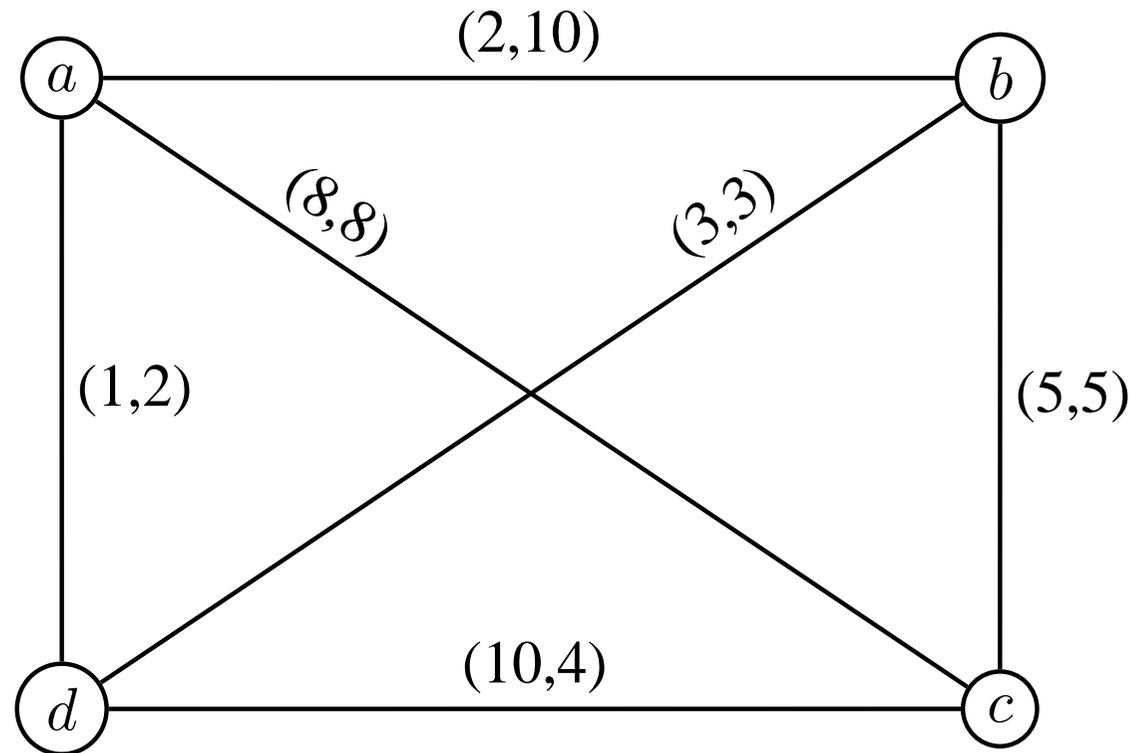
---

En pratique, les valeurs des données et paramètres intervenant dans les modèles sont souvent mal connues (imprécision, incertitude).

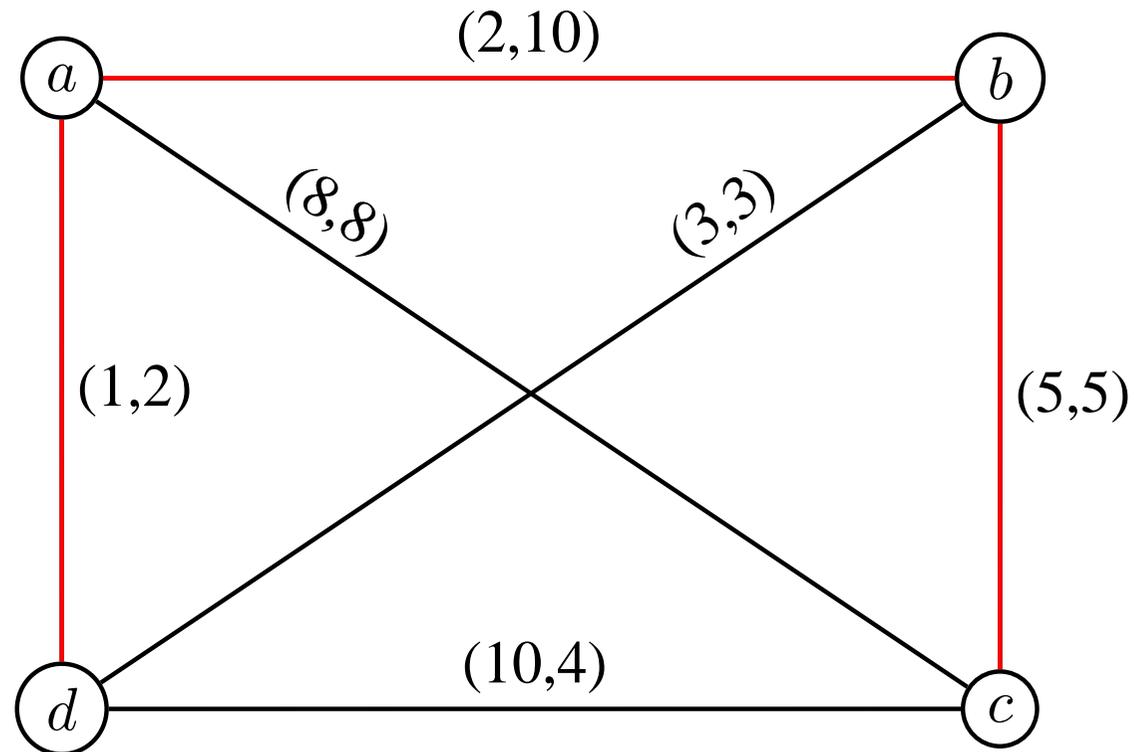
Plutôt que de chercher une solution *optimale*  
→ solution **robuste**.

**Pb** : Comment définir la notion de robustesse ?

## Arbre couvrant de valeur min (2 scenarios)

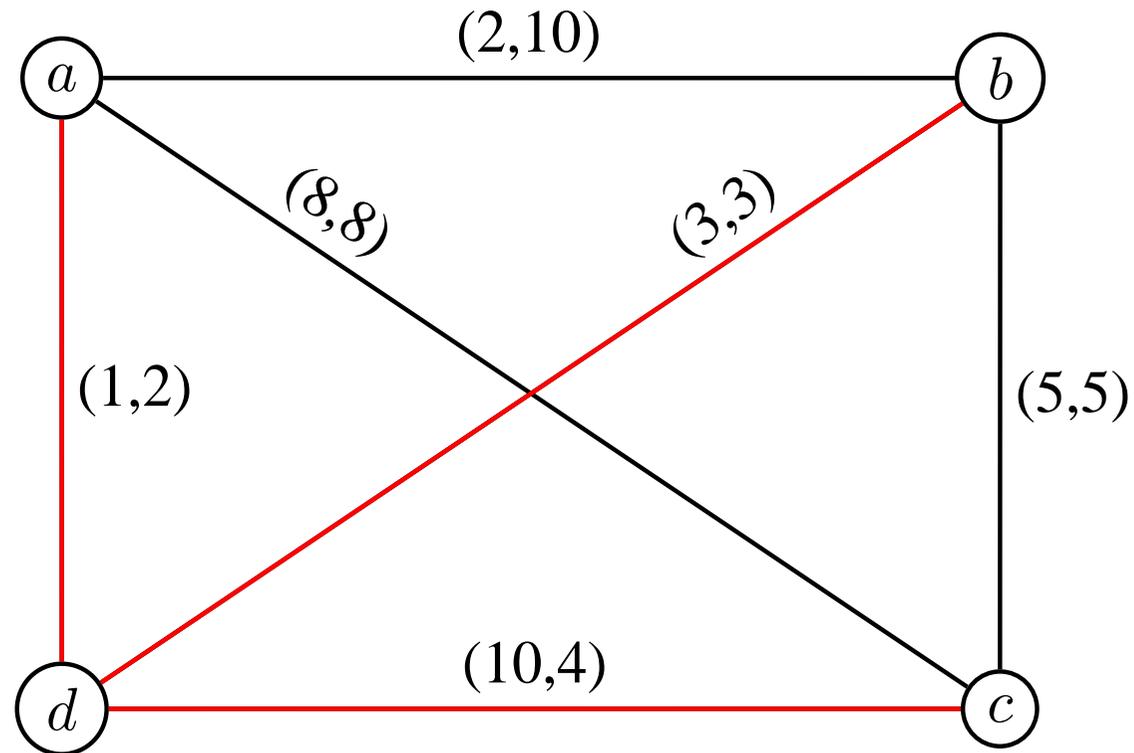


## Arbre couvrant de valeur min (2 scenarios)



MST opt Scenario 1 :  $\{ad, ab, bc\}$   $(8, 17)$

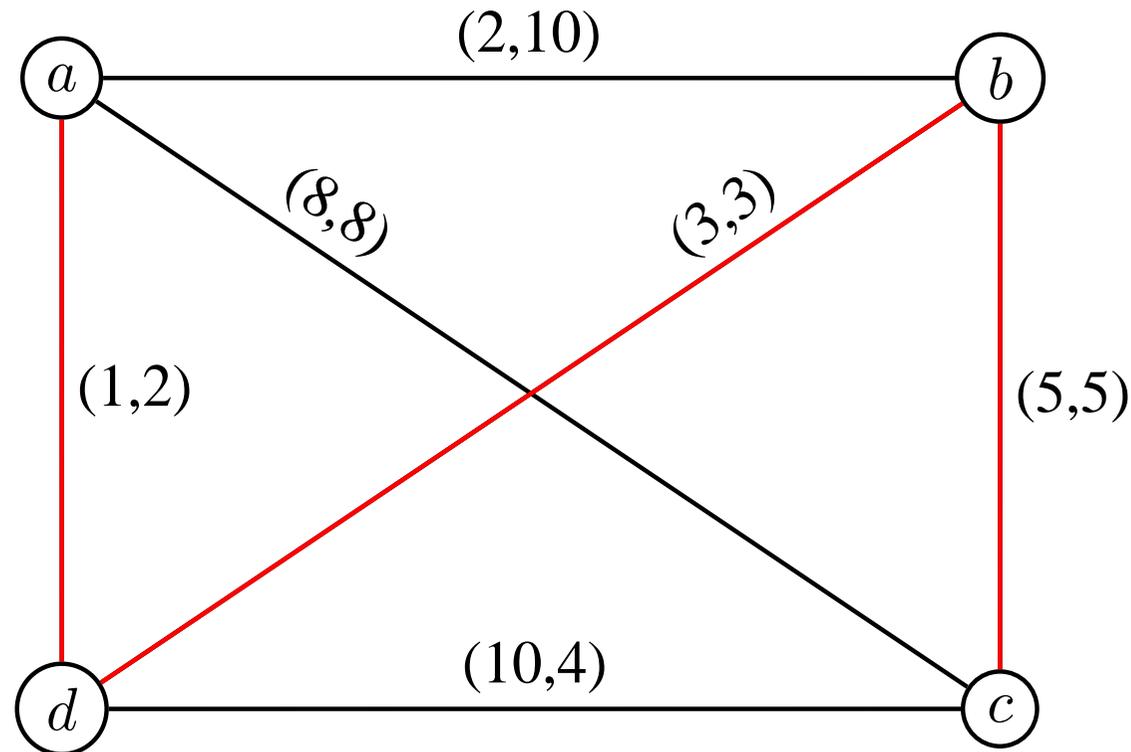
## Arbre couvrant de valeur min (2 scenarios)



MST opt Scenario 1 :  $\{ad,ab,bc\}$   $(8,17)$

MST opt Scenario 2 :  $\{ad,bd,cd\}$   $(14,9)$

## Arbre couvrant de valeur min (2 scenarios)



MST opt Scenario 1 :  $\{ad, ab, bc\}$   $(8, 17)$

MST opt Scenario 2 :  $\{ad, bd, cd\}$   $(14, 9)$

**Robust ST :  $\{ad, bc, bd\}$   $(9, 10)$**

critères min-max, min-max-regret

# Robustesse

---

## Enjeux

- Définir de « bons » critères de robustesse : min-max, min-max-regret,... et d'autres moins conservateurs
- Etudier pour les pbs classiques la complexité, l'approximation
- Développer des méthodes exactes de résolution

## Application

- Fusion robuste de données issues de capteurs (Thales)

# Pour aller plus loin...

- Master 2 **MODO** (Modélisation, Optimisation, Décision, Organisation)

cohabilité avec **Mines de Paris** - site Web : [www.lamsade.dauphine.fr/modo/](http://www.lamsade.dauphine.fr/modo/)

## ● Références

- [1] M. Ehrgott *Multicriteria Optimization* Springer, Berlin, 2005.
- [2] B. Roy. *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision : Méthodes et Cas*. Economica, Paris, 1985.
- [3] B. Roy et D. Bouyssou. *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*. Economica, Paris, 1993.
- [4] Ph. Vallin et D. Vanderpooten. *Aide à la décision : une approche par les cas*. Ellipses, Paris, 2002.
- [5] D. Vanderpooten. « Introduction à l'aide multicritère à la décision » chap.12 dans *Précis de recherche opérationnelle*, 6e édition Dunod, Paris, 2008.