Énumération et génération aléatoire

Matrices à signes alternants et autres objets combinatoires

Philippe Duchon - Équipe Combinatoire et Algorithmique

LaBRI

24 novembre 2009

Notre “fonds de commerce”

- Étude de familles d'objets discrets (mots, arbres, chemins. . .)
- Énumération : “combien y a-t-il d'objets de la classe $\mathcal{C}$, de taille n ?”
  - formule explicite : $c_n = f(n)$
  - implicitement : $F_n(c_0, \ldots, c_n) = 0$
  - identification de la *série génératrice* $C(t) = \sum_n c_n t^n$ (comme série formelle ou comme fonction d'une variable complexe)
- Idéalement : “expliquer” les formules d'énumération par des constructions bijectives
  - $a_n = b_n.c_n$: bijection entre $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n \times \mathcal{C}_n$;
  - $a_n = b_n + c_n$: bijection entre $\mathcal{A}_n$ et l'union disjointe de $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{C}_n$.

Un exemple (ultra)classique : mots de Dyck

- Langage des “mots de parenthèses” : mots sur l'alphabet $\{a, b\}$
  - autant d'occurrences de a que de b ;
  - dans tout facteur gauche du mot, il y a au moins autant d'occurrences de a que de b.
- Énumération : $d_{2n} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ $(1, 2, 5, 14, \dots)$
- Peut-on “expliquer bijectivement” cette formule ? Presque !

$$\begin{array}{ccc} (n+1)C_n & = & \binom{2n}{n} \\ \{1, \dots, n+1\} \times \mathcal{D}_{2n} & \leftrightarrow & \mathcal{B}_{2n} \end{array}$$

où $\mathcal{B}_{2n}$ est l'ensemble des mots binaires de longueur $2n$ avec n occurrences de a et de b.

Matrice à signes alternants

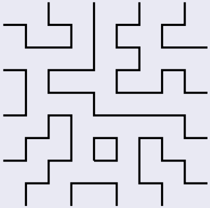
Matrices carrées, à coefficients 0, 1 et -1, telles que dans chaque ligne et colonne,

- les coefficients non nuls alternent en signe
- la somme soit égale à 1

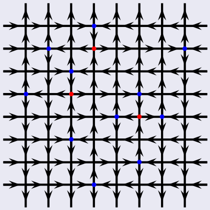
Généralisation des *matrices de permutation* (les ASM sans -1), introduite en 1983 par Mills, Robbins et Rumsey

Plusieurs représentations des mêmes objets

FPL



Glace carrée



ASM

$$\begin{matrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&-1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{matrix}$$

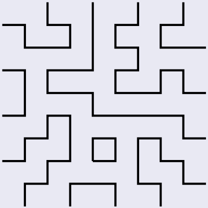
Mat. hauteurs

$$\begin{matrix} 0&1&2&3&4&5&6&7&8\\ 1&2&3&4&3&4&5&6&7\\ 2&3&2&3&4&5&6&7&6\\ 3&4&3&2&3&4&5&6&5\\ 4&3&2&3&4&5&4&5&4\\ 5&4&3&4&5&4&5&4&3\\ 6&5&4&3&4&3&4&3&2\\ 7&6&5&4&5&4&3&2&1\\ 8&7&6&5&4&3&2&1&0 \end{matrix}$$

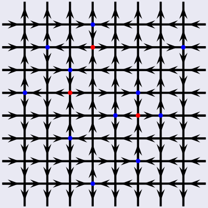
FPL : Fully-packed loop (configuration de boucles compactes)

Plusieurs représentations des mêmes objets

FPL



Glace carrée



ASM

$$\begin{matrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&-1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{matrix}$$

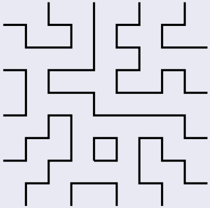
Mat. hauteurs

$$\begin{matrix} 0&1&2&3&4&5&6&7&8\\ 1&2&3&4&3&4&5&6&7\\ 2&3&2&3&4&5&6&7&6\\ 3&4&3&2&3&4&5&6&5\\ 4&3&2&3&4&5&4&5&4\\ 5&4&3&4&5&4&5&4&3\\ 6&5&4&3&4&3&4&3&2\\ 7&6&5&4&5&4&3&2&1\\ 8&7&6&5&4&3&2&1&0 \end{matrix}$$

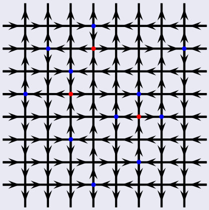
ASM : Alternating-sign matrix (matrice à signes alternants)

Plusieurs représentations des mêmes objets

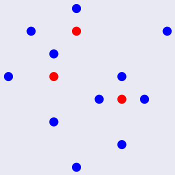
FPL



Glace carrée



ASM



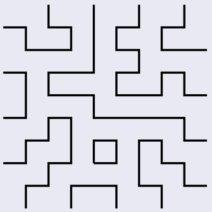
Mat. hauteurs

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	3	4	5	6	7
2	3	2	3	4	5	6	7	6
3	4	3	2	3	4	5	6	5
4	3	2	3	4	5	4	5	4
5	4	3	4	5	4	5	4	3
6	5	4	3	4	3	4	3	2
7	6	5	4	5	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1	0

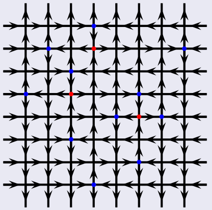
ASM : Alternating-sign matrix (matrice à signes alternants)

Plusieurs représentations des mêmes objets

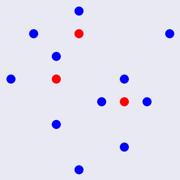
FPL



Glace carrée



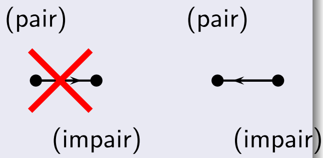
ASM



Mat. hauteurs

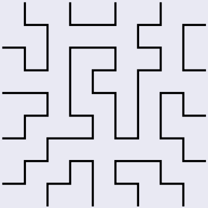
0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	3	4	5	6	7
2	3	2	3	4	5	6	7	6
3	4	3	2	3	4	5	6	5
4	3	2	3	4	5	4	5	4
5	4	3	4	5	4	5	4	3
6	5	4	3	4	3	4	3	2
7	6	5	4	5	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1	0

Correspondances

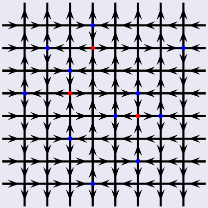


Plusieurs représentations des mêmes objets

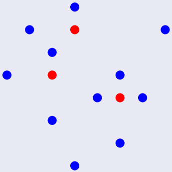
anti-FPL



Glace carrée



ASM



Mat. hauteurs

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	3	4	5	6	7
2	3	2	3	4	5	6	7	6
3	4	3	2	3	4	5	6	5
4	3	2	3	4	5	4	5	4
5	4	3	4	5	4	5	4	3
6	5	4	3	4	3	4	3	2
7	6	5	4	5	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1	0

Énumération des ASM

- La suite énumératrice des ASM : $1, 2, 7, 42, 429, 7456 \ldots$
- Formule d'énumération : conjecturée par [Mills, Robbins, Rumsey 1983], prouvée par [Zeilberger, 1996][Kuperberg, 1997] :

$$A(n) = \prod_{0 \leq i < n} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$$

- Formule intrigante : la *même séquence* compte également une famille d'autres objets, des *partitions planes* (de manière équivalente : pavages par losangs d'un hexagone régulier de côté $2n$, invariants par toutes les symétries de l'hexagone)
- **Aucune des preuves connues** ne donne d'idée pour construire une **bijection** explicite entre les deux familles.

Classes de symétrie

- **Toutes les symétries possibles du carré** donnent des classes de symétrie d'ASM (parfois vides pour certaines tailles : pas de symétrie verticale en taille impaire)
- **Presque toutes les classes** ont des formules d'énumération remarquables :

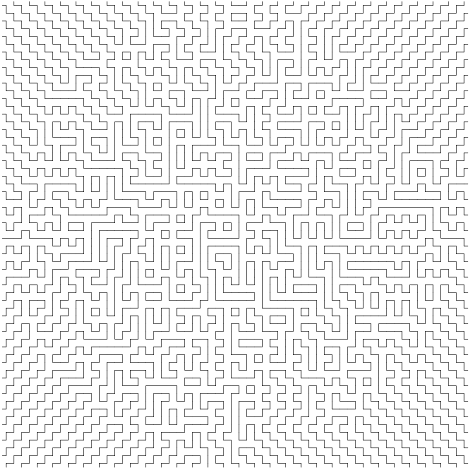
$$\begin{aligned} A_{HT}(2N) &= A(N)P_3(N) \\ A_{QT}(4N \pm 1) &= A_{HT}(2N \pm 1)A(N)^2 \\ A_{QT}(4N) &= A_{HT}(2N)A(N)^2 \end{aligned}$$

  (exceptions : symétrie diagonale, et double symétrie diagonale en taille paire)
- **Problème ouvert :** $(A_{DD}(2N+1))^2 = 3^N A_{HT}(2N+1)$

Ensembles partiellement ordonnés d’ASM

- Les matrices de hauteurs d’une taille donnée, sont naturellement ordonnées par la comparaison coefficient par coefficient.
- L’ensemble $\mathcal{A}(N)$ de toutes les ASM de taille N, ainsi ordonné, forme un *treillis distributif fini*, isomorphe au treillis des idéaux d’un ensemble qu’il est facile de décrire explicitement.
- C’est la situation idéale pour appliquer l’algorithme du “couplage depuis le passé” (CFTP ; Propp et Wilson), qui permet de tirer des idéaux, et donc des ASM, aléatoires selon la loi uniforme.

Un FPL (ASM) aléatoire de taille 60

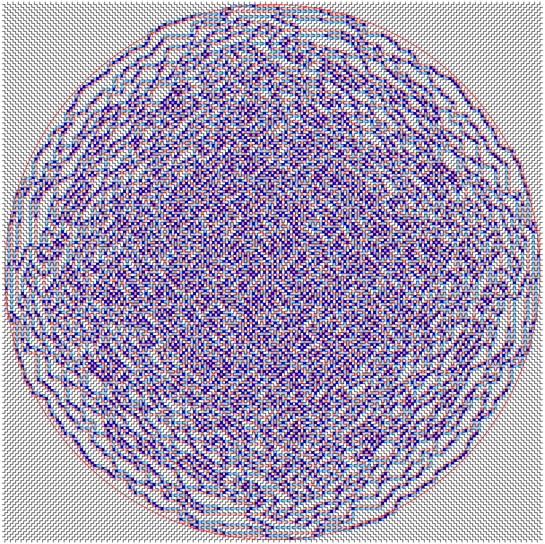


(simulation arrière d’une chaîne de Markov pendant un nombre de pas qui, expérimentalement, est de l’ordre de $N^{4.5}$)

Tirage d'ASM aléatoires avec symétries

- **[D., Le Gac 2008]** Sym-CFTP : adaptation de l'algorithme de Propp et Wilson, permettant (entre autres) le tirage aléatoire uniforme d'ASM ou de FPL (quasi-)symétriques pour toutes les classes de symétrie.
- Dans le cas des QTASM, il n'existe pas de structure ordonnée naturelle permettant de se passer de notre algorithme.
- Pour les différentes classes de symétrie, on continue à observer un phénomène de type "cercle arctique".
- **Problèmes ouverts :** analyse fine de la complexité en temps, preuve du phénomène "arctique" pour les classes de symétrie...

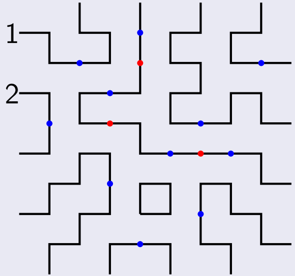
Un QTFPL aléatoire de taille 200



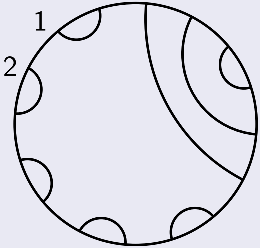
Les FPL et leurs couplages

À chaque FPL f, on associe un *diagramme de cordes* (ou *couplage plan*; appariement de $2N$ points répartis sur un cercle, sans croisements) en suivant les chemins issus des bords (les éventuelles boucles fermées sont ignorées)

Le FPL f



Le couplage $C(f)$



(deux paires $\{i, j\}$ et $\{k, l\}$ se *croisent* si $i < k < j < l$)

Énumération selon le diagramme de cordes

On se pose (mais pourquoi ?) la question de l'énumération de ASM selon leur diagramme de cordes :

$$A(N) = \sum_{w} A(N; w)$$

- Que vaut $A(N, w)$? (formules connues seulement pour des familles très particulières de diagrammes)
- De manière équivalente : quelle est la **loi de probabilités** induite sur les diagrammes par la loi uniforme sur les ASM ?

La gyration de Wieland

Rotation sur un couplage

Si p est un diagrsamme de cordes, $R(p)$ est le diagramme qui, pour chaque paire $\{i, j\}$ de p, contient la paire $\{i+1, j+1\}$ (rotation de $1/2N$ tour dans le sens antihoraire).

Théorème (Wieland, 2001)

Si $A(N; p)$ désigne le nombre de FPL (de taille N) ayant π pour diagramme, alors

$$A(N; p) = A(N; R(p)).$$

La distribution est **invariante par rotation !**
(Preuve par construction explicite d'une bijection)

Conjecture de Razumov-Stroganov (2000)

- La **conjecture de Razumov et Stroganov** interprète la distribution des diagrammes de cordes comme la distribution limite d'un processus stochastique (chaîne de Markov) directement défini sur les diagrammes, par “croisements de brins”
- Différentes variantes (De Gier ; D.) du même acabit existent pour certaines classes de symétrie.
- À l'heure actuelle, on ne connait même pas d'algorithme raisonnable pour calculer $A(N; w)$!
  - parcours de $\mathcal{A}(N)$ et filtrage de $\mathcal{A}(N; w)$: $A(N) = e^{\Theta(N^2)}$
  - parcours de l'ensemble $\mathcal{A}(N; w)$ lui-même par transformations locales simples : il manque une preuve de connexité