Des jeux de parité aux cercles vertueux

Luigi Santocanale
LIF, Aix-Marseille Université

visite ENS, 19 décembre 2013

Plan

Les jeux de parité

Des jeux à la logique

Points fixes des fonctions croissantes (monotones)

Stratégies comme preuves circulaires

Plan

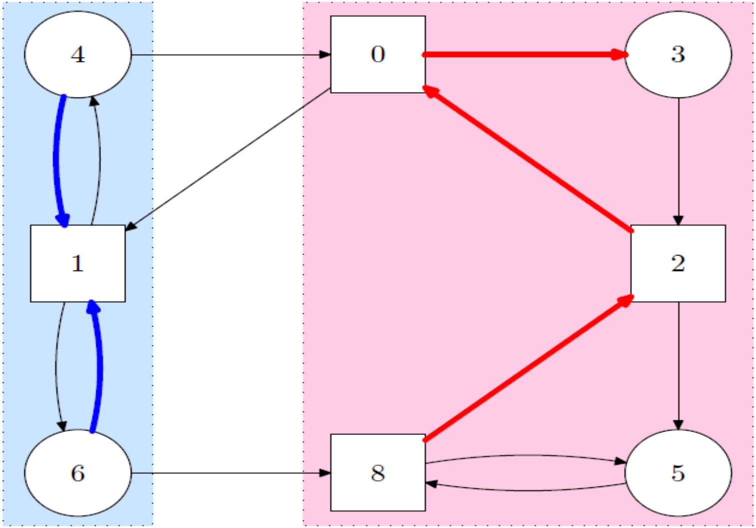
Les jeux de parité

Des jeux à la logique

Points fixes des fonctions croissantes (monotones)

Stratégies comme preuves circulaires

Depuis Wikipédia



Jeux de parité

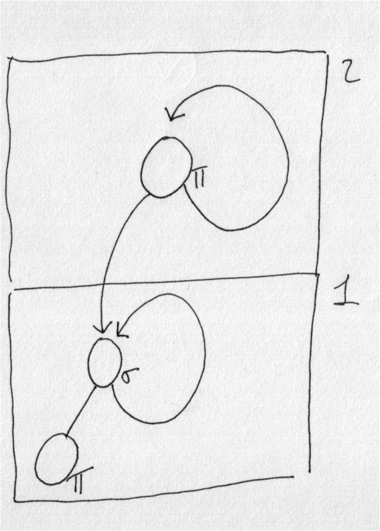
Un *jeu de parité* est un tuplet

$$G = \langle V, E, v_0, \lambda, \rho \rangle$$

tel que

- $\langle V, E \rangle$ est un DAG enraciné (les positions et les coups),
- v_0 est la position initiale,
- $\lambda : V \longrightarrow \{\sigma, \pi\}$,
- $\rho : V \longrightarrow \{0, \ldots, n, \ldots\}$.

Une partie infinie est gagnante pour σ (i.e. Eva) ssi le maximum des nombres visités inifiniment souvent est Pair (Even, en anglais).



Remarque

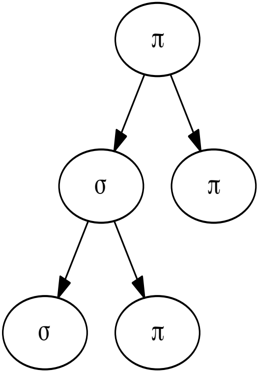
Jeux de parité sans cycles = Jeux

Plan

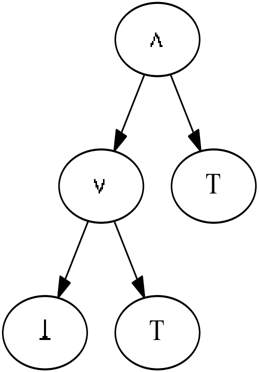
Un dictionnaire logique

Français	Anglais	Logique	Ordre	Algèbre	Famille
vrai	true	$\top$	top	1	π
et	and	$\wedge$	bin-inf	$\times$	π
faux	false	$\perp$	bottom	0	σ
ou	or	$\vee$	bin-sup	$+$	σ
		$\vdash$	$\leq$		

Stratégies gagnantes et preuves

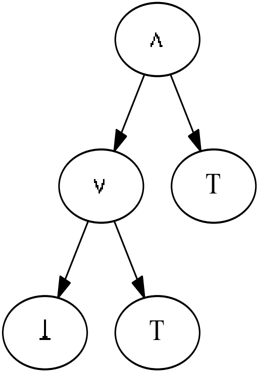


Stratégies gagnantes et preuves



Stratégies gagnantes et preuves

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\top \vdash \top}\,\mathrm{R}\top}{\top \vdash \bot \vee \top}\,\mathrm{R}\vee_1 \qquad \dfrac{}{\top \vdash \top}\,\mathrm{R}\top}{\top \vdash (\bot \vee \top) \wedge \top}\,\mathrm{R}\wedge$$



Règles logiques (calcul des séquents) pour $\top, \wedge, \bot, \vee$

$$\frac{}{\phi \vdash \top}\ \mathrm{R}\top$$

$$\frac{\phi_i \vdash \psi}{\phi_0 \wedge \phi_1 \vdash \psi}\ \mathrm{L}\wedge_i \qquad \frac{\phi \vdash \psi_0 \quad \phi \vdash \psi_1}{\phi \vdash \psi_0 \wedge \psi_1}\ \mathrm{R}\wedge$$

$$\frac{}{\bot \vdash \psi}\ \mathrm{L}\bot$$

$$\frac{\phi_0 \vdash \psi \quad \phi_1 \vdash \psi}{\phi_0 \vee \phi_1 \vdash \psi}\ \mathrm{L}\vee \qquad \frac{\phi \vdash \psi_i}{\phi \vdash \psi_0 \vee \psi_1}\ \mathrm{R}\vee_i$$

. . . et pour les jeux avec cycles ?

Peut on trouver une logique qui correspond aux jeux de parité, donc avec cycles ?

Plan

Plus petit point fixe d'un fonction croissante (monotone)

Définition Soit P un ensemble ordonné et $f : P \to P$ une fonction croissante. $\mu \in P$ est

- un *plus petit point fixe* de f si
  (i) $f(\mu) = \mu$,
  (ii) $f(x) = x$ implique $\mu \leq x$, pour tout $x \in P$.

Plus petit point fixe d'un fonction croissante (monotone)

Définition Soit P un ensemble ordonné et $f : P \to P$ une fonction croissante. $\mu \in P$ est

- un *plus petit point fixe* de f si
  (i) $f(\mu) = \mu$,
  (ii) $f(x) = x$ implique $\mu \leq x$, pour tout $x \in P$.
- un *plus petit point préfixe* de f si
  (i) $f(\mu) \leq \mu$,
  (ii) $f(x) \leq x$ implique $\mu \leq x$, pour tout $x \in P$.

Plus petit point fixe d'un fonction croissante (monotone)

Définition Soit P un ensemble ordonné et $f : P \to P$ une fonction croissante. $\mu \in P$ est

- un *plus petit point fixe* de f si
  (i) $f(\mu) = \mu$,
  (ii) $f(x) = x$ implique $\mu \leq x$, pour tout $x \in P$.
- un *plus petit point préfixe* de f si
  (i) $f(\mu) \leq \mu$,
  (ii) $f(x) \leq x$ implique $\mu \leq x$, pour tout $x \in P$.

Remarques

- Si μ, μ' sont des plus petit point (pré)fixe de f alors $\mu = \mu'$.
- Presque toujours, plus petit point fixe = plus petit point préfixe, on peut les prendre comme synonymes.

Plus grand point fixe

Définition Soit P un ensemble ordonné et $f : P \to P$ une fonction croissante. $\nu \in P$ est

- le *plus grand point (post)fixe* de f si
  (i) $\nu \leq f(\nu)$,
  (ii) $x \leq f(x)$ implique $x \leq \nu$, pour tout $x \in P$.

Le Théorème de Tarski (et Knaster)

Theorem (Tarski55)

Soient L un treillis complet et $f : L \to L$ une fonction croissante. Alors

$$\inf\{\, x \in L \mid f(x) \leq x \,\} \qquad \sup\{\, x \in L \mid x \leq f(x) \,\}$$

sont, respectivement, le plus petit et le plus grand point fixes de f.

Un nouveau dictionnaire logique

Français	Anglais	Logique	Ordre	Algèbre	Famille
vrai	true	$\top$	top	1	π
et	and	$\wedge$	bin-inf	$\times$	π
faux	false	$\perp$	bottom	0	σ
ou	or	$\vee$	bin-sup	$+$	σ
		$\vdash$	$\leq$		
pGpf	Gfp	ν	Gfp	ν	σ
pPpf	Lfp	μ	Lfp	μ	σ

Remarque

- L'ensemble $\{0, 1\}$, ordonné par $0 \leq 1$, est un treillis complet.
- Si une formule ϕ contenient la variable libre X, on obtient une fonction croissante de la variable X

  $$[\![\phi]\!] : \{0, 1\} \to \{0, 1\}.$$

  Par exemple, si $\phi = \bot \vee (X \wedge \top)$, alors

  $$[\![\phi]\!](X) = \max(0, \min(X, 1)).$$

- De même, on peut utiliser, à la place de $\{0 \leq 1\}$, un treillis complet L choisi de façon arbitraire.

Une logique (minimale) de point fixe

Syntaxe :

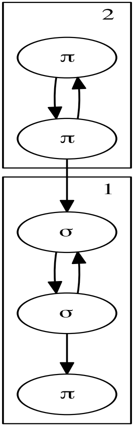
$$\phi = x \mid \bot \mid \phi \vee \phi \mid \top \mid \phi \wedge \phi \mid \mu_X.\phi \mid \nu_X.\phi\,.$$

Sémantique :

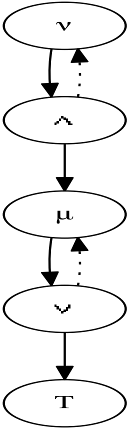
$$[\![\mu_X.\phi]\!] = \text{ pPpf de } [\![\phi]\!]\,, \qquad [\![\nu_X.\phi]\!] = \text{ pGpf de } [\![\phi]\!]\,.$$

Plan

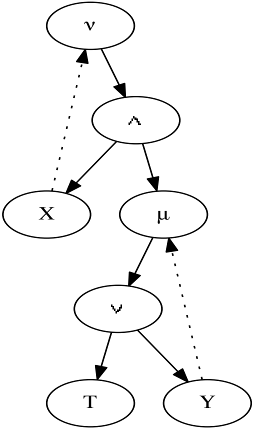
Stratégies comme preuves circulaires



Stratégies comme preuves circulaires

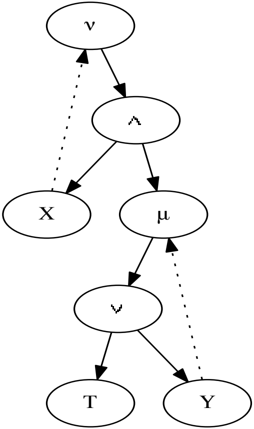


Stratégies comme preuves circulaires



Stratégies comme preuves circulaires

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\top \vdash X \wedge \mu_Y.(\top \vee Y)}{\top \vdash X} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\top \vdash \top}\,\mathrm{R}\top}{\top \vdash \top \vee Y}\,\mathrm{R}\vee_0}{\top \vdash Y}}{\top \vdash \top \vee Y}\,\mathrm{R}\vee_1}{\top \vdash \mu_Y.(\top \vee Y)}}{\top \vdash X \wedge \mu_Y.(\top \vee Y)}\,\mathrm{R}\wedge}{\top \vdash \nu_X.(X \wedge \mu_Y.(\top \vee Y))}
$$



Règles pour les points fixes

Remplacer une formule par son « body » :

$$\begin{aligned} Q_X.\xi(x) &\rightsquigarrow \xi(X)\,, \\ X &\rightsquigarrow \xi(X)\,, \quad \text{si } X \text{ est liée par } Q_X.\xi(X)\,, \end{aligned}$$

où $Q \in \{\, \mu, \nu \,\}$.

$$\frac{\xi(X) \vdash \psi}{X \vdash \psi}\,\mathrm{L}\mu X \qquad \frac{\phi \vdash \xi(X)}{\phi \vdash X}\,\mathrm{R}\mu X \qquad X \sim \mu_X.\xi(X) \sim \xi(X)$$

$$\frac{\xi(X) \vdash \psi}{X \vdash \psi}\,\mathrm{L}\nu X \qquad \frac{\phi \vdash \xi(X)}{\phi \vdash X}\,\mathrm{R}\nu X \qquad X \sim \nu_X.\xi(X) \sim \xi(X)$$

Les cercles ne sont pas vicieux

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\top \vdash \xi(X)}{\top \vdash X}}{\vdots}}{\dfrac{\top \vdash \xi(X)}{\top \vdash \nu_X.\xi(X)}}
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{?}{\top \vdash X}}{\vdots}}{\top \vdash \xi(X)}
\quad \rightsquigarrow \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\top \vdash \top}\,\mathtt{R}\top}{\vdots}}{\top \vdash \xi(\top)}
$$

Par consequent, $\top$ est un point postfixe de ξ et il est plus petit du plus grand : $\top \vdash \nu_X.\xi(X)$. $\square$

. . . ils sont vertueux

$$\left\{ \begin{array}{cc}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\phi_1 \vdash \xi(X)}{\phi_1 \vdash X}\\ \vdots\end{array}}{\phi_0 \vdash \xi(X)}}{\phi_0 \vdash \nu_X.\xi(X)}
&
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\phi_0 \vdash \xi(X)}{\phi_0 \vdash X}\\ \vdots\end{array}}{\phi_1 \vdash \xi(X)}
\end{array} \right\}$$

$$\left\{ \quad \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{?}{\phi_1 \vdash X} \\ \vdots \end{array}}{\phi_0 \vdash \xi(X)} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{?}{\phi_0 \vdash X} \\ \vdots \end{array}}{\phi_1 \vdash \xi(X)} \quad \right\}$$

$$\left\{ \quad \dfrac{\begin{array}{c} \phi_1 \vdash \phi_0 \vee \phi_1 \\ \vdots \end{array}}{\phi_0 \vdash \xi(\phi_0 \vee \phi_1)} \quad \dfrac{\begin{array}{c} \phi_0 \vdash \phi_0 \vee \phi_1 \\ \vdots \end{array}}{\phi_1 \vdash \xi(\phi_0 \vee \phi_1)} \quad \right\}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\phi_1 \vdash \phi_0 \vee \phi_1 \\ \vdots\end{matrix}}{\phi_0 \vdash \xi(\phi_0 \vee \phi_1)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\phi_0 \vdash \phi_0 \vee \phi_1 \\ \vdots\end{matrix}}{\phi_1 \vdash \xi(\phi_0 \vee \phi_1)}}{\phi_0 \vee \phi_1 \vdash \xi(\phi_0 \vee \phi_1)} \, \mathtt{L}\vee$$

Donc : $\phi_0 \vee \phi_1$ est un point postfixe de ξ et par conséquent il est plus petit du plus grand : $\phi_0 \vee \phi_1 \vdash \nu_X.\xi(X)$. Il en decoule que $\phi_0 \vdash \nu_X.\xi(X)$. $\square$