Problème d'optimisation combinatoire

Un problème d'optimisation combinatoire est un problème de minimisation ou de maximisation dans un univers combinatoire.

- Minimum Spanning Tree (MST)
- Traveling Salesman Problem (TSP)
- Maximum Satisfiability (Max 3-SAT)

Approximation

- Une α-approximation pour un problème de maximisation est un algorithme qui pour toute instance renvoie une solution réalisable de valeur au plus $\alpha * opt$, avec *opt* la valeur optimale sur cette instance.
- TSP admet une $3/2$-approximation

Innapproximabilité

Il existe des bornes inférieures sur les approximations sous la réserve de $P \neq NP$.

- TSP est .. innapproximable
- Max 3-SAT est $8/7$-innaproximable [Hastad 2001]

Les résultats d'innaproximabilité sont généralement dus à des réductions préservant d'une certaine manière l'approximation.

MaxLabelPath

Entrée: Un graphe dirigé G et une fonction $V- > \mathbb{N}$.

Sortie: Un chemin P dont la valeur est $|Label(V(P))|$.

Réduction de MaxSat

Un ensemble de clauses:

$$\begin{array}{ccc} a \vee b \vee \neg c & a \vee d \vee \neg f & \neg a \vee \neg c \vee e \\ b \vee \neg d \vee \neg e & \neg b \vee c \vee \neg e & c \vee \neg d \vee f \\ \neg c \vee e \vee f & d \vee \neg e \vee f & \end{array}$$

Réduction à MaxSat

Un ensemble de clause:

$a \vee b \vee \neg c$	$a \vee d \vee \neg f$	$\neg a \vee \neg c \vee e$
$b \vee \neg d \vee \neg e$	$\neg b \vee c \vee \neg e$	$c \vee \neg d \vee f$
$\neg c \vee e \vee f$	$d \vee \neg e \vee f$	

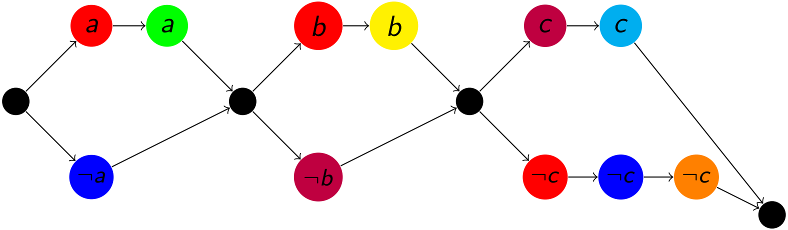
Réduction à MaxSat

Un ensemble de clause:

$a \vee b \vee \neg c$ $\quad a \vee d \vee \neg f$ $\quad \neg a \vee \neg c \vee e$

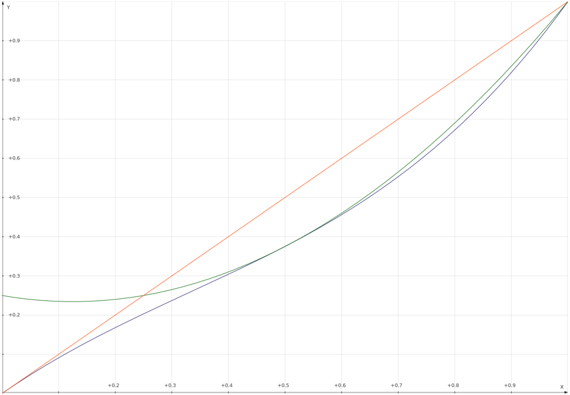
$b \vee \neg d \vee \neg e$ $\quad \neg b \vee c \vee \neg e$ $\quad c \vee \neg d \vee f$

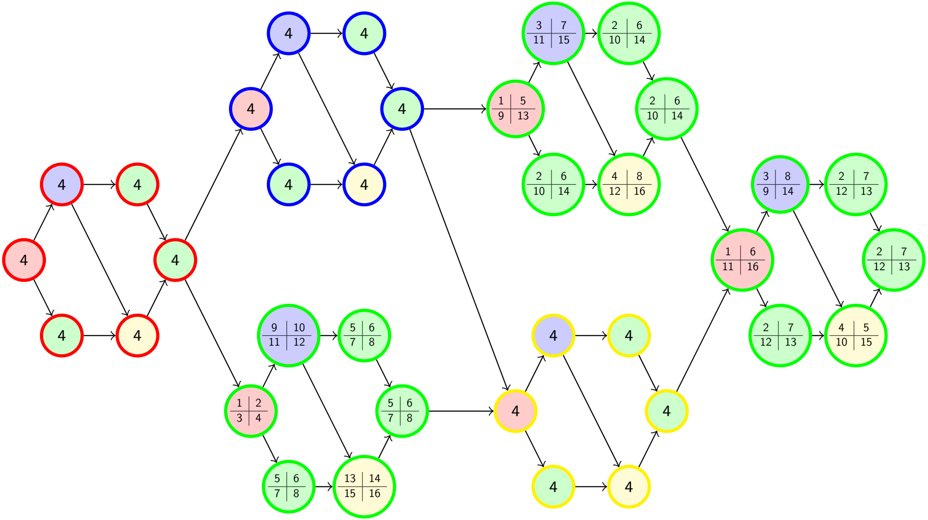
$\neg c \vee e \vee f$ $\quad d \vee \neg e \vee f$

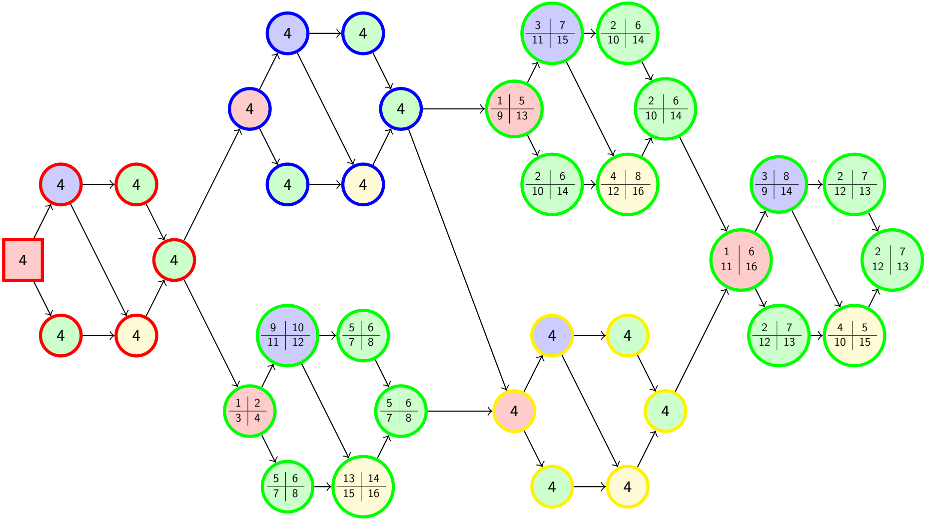


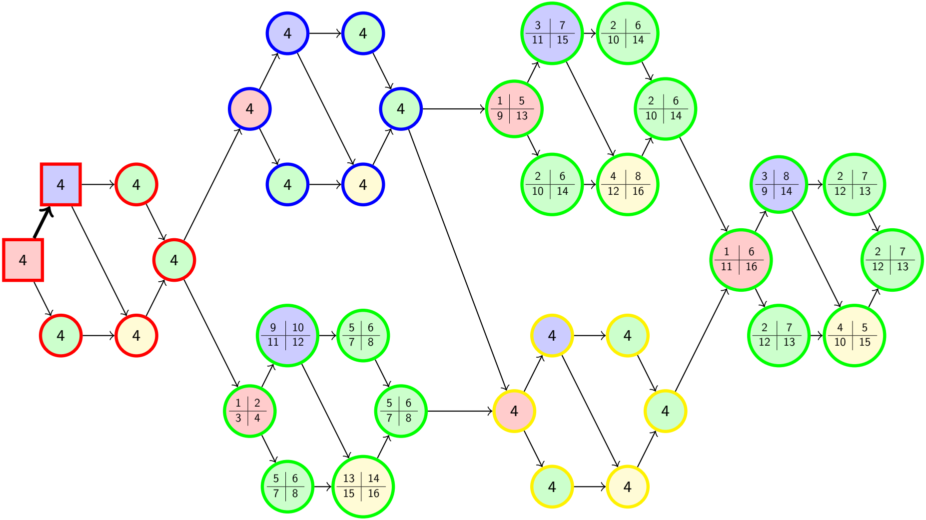
A partir d'une instance D, on crée une instance square(D) telle que si on a une solution avec un rapport α par rapport à l'optimal sur cette solution alors on a une solution pour D de rapport $h(\alpha)$.

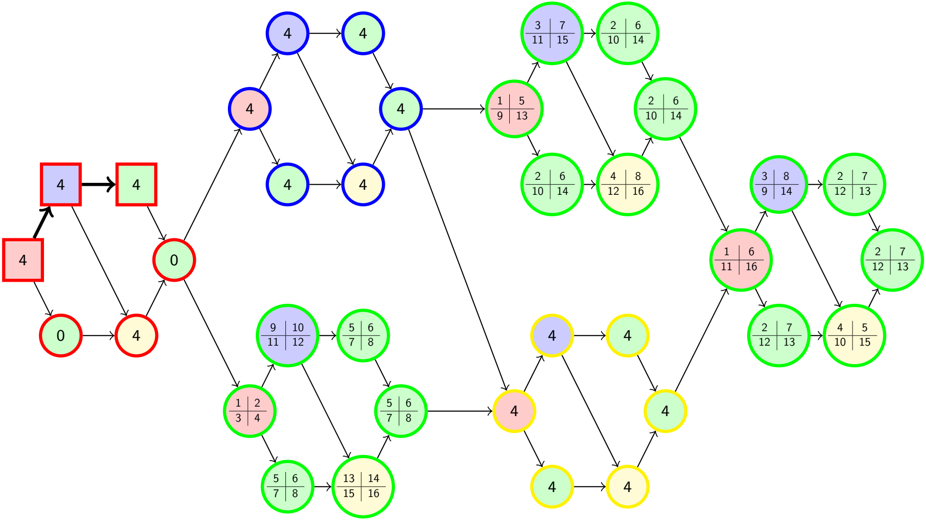
$$
\begin{aligned}
h(x) &= x(x^2 - x + 1) & \text{si } 0 < x < \tfrac{1}{2} \\
&= x^2 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4} & \text{si } \tfrac{1}{2} \leq x < 0
\end{aligned}
$$

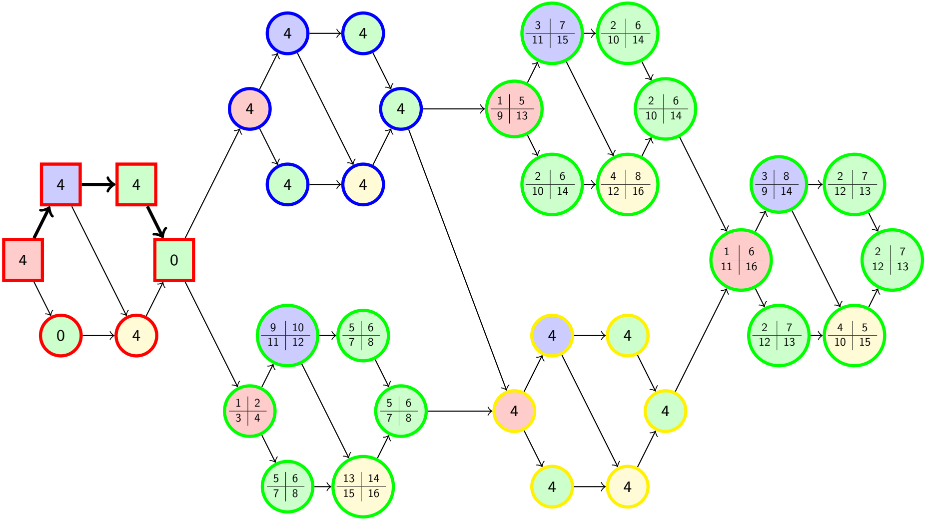

Y
+0.9
+0.8
+0.7
+0.6
+0.5
+0.4
+0.3
+0.2
+0.2
+0.3
+0.4
+0.5
+0.6
+0.7
+0.8
+0.9
X

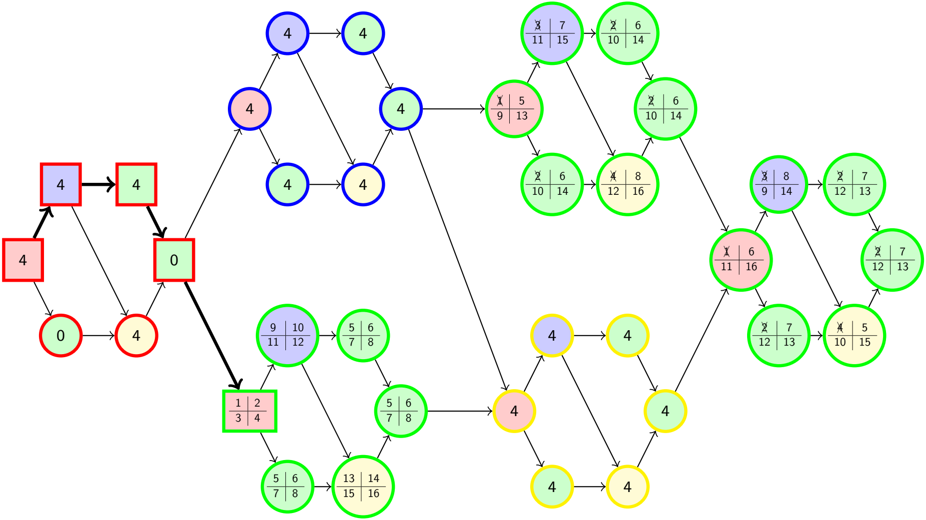

4
1 | 5
9 | 13
3 | 7
11 | 15
2 | 6
10 | 14
4 | 8
12 | 16
1 | 6
11 | 16
3 | 8
9 | 14
2 | 7
12 | 13
4 | 5
10 | 15
1 | 2
3 | 4
9 | 10
11 | 12
5 | 6
7 | 8
13 | 14
15 | 16


4
4
4
4
4
4
4
4
4
4
4
4
4
1 | 5
9 | 13
3 | 7
11 | 15
2 | 6
10 | 14
2 | 6
10 | 14
2 | 6
10 | 14
4 | 8
12 | 16
1 | 2
3 | 4
9 | 10
11 | 12
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
13 | 14
15 | 16
4
4
4
4
4
4
1 | 6
11 | 16
3 | 8
9 | 14
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
4 | 5
10 | 15


4
1 | 2
3 | 4
9 | 10
11 | 12
5 | 6
7 | 8
13 | 14
15 | 16
1 | 5
9 | 13
3 | 7
11 | 15
2 | 6
10 | 14
4 | 8
12 | 16
1 | 6
11 | 16
3 | 8
9 | 14
2 | 7
12 | 13
4 | 5
10 | 15


4
4
4
0
4
0
4
4
4
4
4
4
4
1 | 2
3 | 4
9 | 10
11 | 12
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
13 | 14
15 | 16
1 | 5
9 | 13
3 | 7
11 | 15
2 | 6
10 | 14
2 | 6
10 | 14
2 | 6
10 | 14
4 | 8
12 | 16
4
4
4
4
4
4
1 | 6
11 | 16
3 | 8
9 | 14
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
4 | 5
10 | 15


4
4
4
0
0
4
4
4
4
4
4
4
4
1 | 2
3 | 4
9 | 10
11 | 12
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
13 | 14
15 | 16
3 | 7
11 | 15
2 | 6
10 | 14
1 | 5
9 | 13
2 | 6
10 | 14
2 | 6
10 | 14
4 | 8
12 | 16
4
4
4
4
4
4
1 | 6
11 | 16
3 | 8
9 | 14
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
4 | 5
10 | 15


4
4
4
0
0
4
4
4
4
4
4
4
1 | 2
3 | 4
9 | 10
11 | 12
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
5 | 6
7 | 8
13 | 14
15 | 16
3 | 7
11 | 15
2 | 6
10 | 14
1 | 5
9 | 13
2 | 6
10 | 14
2 | 6
10 | 14
4 | 8
12 | 16
4
4
4
4
4
4
1 | 6
11 | 16
3 | 8
9 | 14
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
2 | 7
12 | 13
4 | 5
10 | 15