Automates Cellulaires

P. Guillon et G. Theyssier

équipe GDAC, I2M

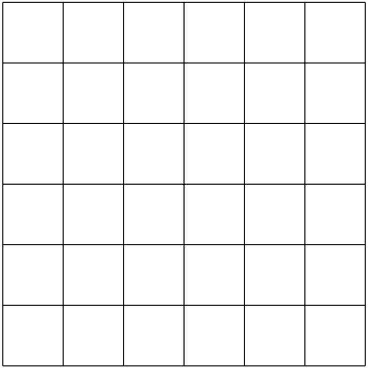
nov. 2017

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

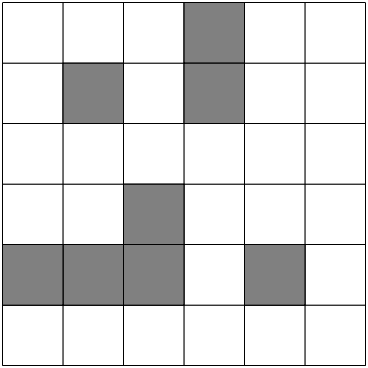
1. **Introduction / définitions**
2. Décidabilité et complexité
3. Résistance au bruit
4. Mélange, aléa, dynamique ergodique
5. Universalité

Qu’est-ce que c’est ?



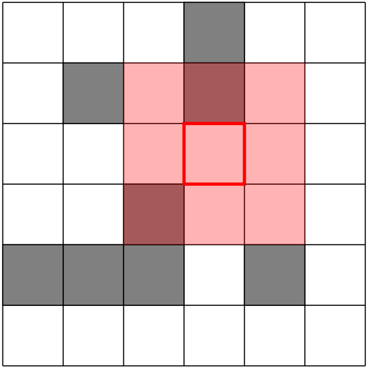
1. espace discret

Qu'est-ce que c'est ?



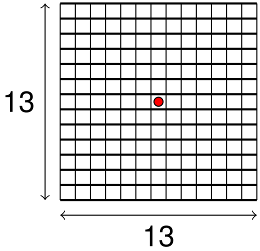
1. espace discret
2. ensemble fini d'états

Qu’est-ce que c’est ?



1. espace discret
2. ensemble fini d’états
3. loi d’évolution locale, uniforme, à temps discrets

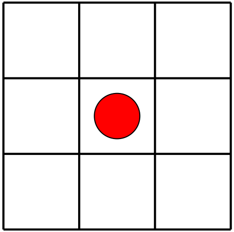
Exemple 1 : majorité



- **états :** 0 and 1
- **règle :** prendre l’état majoritaire du voisinage

DEMO

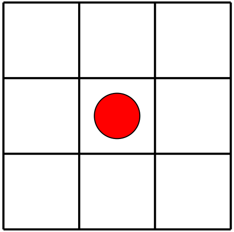
Exemple 2: le Jeu de la Vie

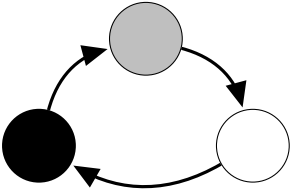


- **states:** dead / alive
- $n =$ nb of alive cells in neighb.
- **birth:** $n = 3$
- **survival:** $n = 3$ or 4
- otherwise **death**

DEMO

Can you guess the global behavior?





rule: change to next state in the cycle **if** seen $\geq$ 3 times in neighborhood, **otherwise** do not change

DEMO

Q^{L}

- **finite set** (alphabet or states or colors...)

$$Q^L$$

- **finite set** (alphabet or states or colors...)

$$Q^{L}$$

- **the "lattice"**
  - a monoid or a group
  - law denoted '$+$'
  - finitely generated
  - *typically:* $\mathbb{Z}^d$

- *Syntactical object (given)*
  - **neighborhood**: a finite domain D
  - **local rule**: $f : Q^D \to Q$

- *Syntactical object (given)*
  - **neighborhood**: a finite domain D
  - **local rule**: $f : Q^D \to Q$
- *Dynamical system (studied)*
  - global function : $F : Q^L \to Q^L$ s.t.

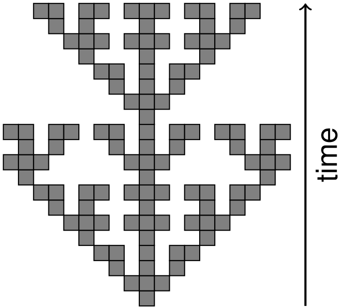
$$F(c)_z = f(c_{[D,z]})$$

where $c_{[D,z]}$ is the finite pattern : $z' \in D \mapsto c(z + z')$

Théorie

Example: local sum mod 2

- $L = \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$
- $Q = \{0, 1\}$
- $D = \{-1, 0, 1\}$
- $f(x, y, z) = x + y + z \bmod 2$



- configuration

$$c : L \to Q$$

- configuration

$$c : L \to Q$$

- finite pattern

$$\rho : D \subseteq L \to Q$$

- cylinder set (**basis of the topology**)

$$C_\rho = \{c : \forall z \in D, c(z) = \rho(z)\}$$

- configuration

$$c : L \to Q$$

- finite pattern

$$\rho : D \subseteq L \to Q$$

- cylinder set (**basis of the topology**)

$$C_\rho = \{c : \forall z \in D, c(z) = \rho(z)\}$$

- **distance giving the same topology**

$$d(c, c') = 2^{-\min\{|z| : c(z) \neq c'(z)\}}$$

- configuration

$$c : L \to Q$$

- finite pattern

$$\rho : D \subseteq L \to Q$$

- cylinder set (**basis of the topology**)

$$C_\rho = \{c : \forall z \in D, c(z) = \rho(z)\}$$

- **distance giving the same topology**

$$d(c, c') = 2^{-\min\{|z| : c(z) \neq c'(z)\}}$$

Key fact

Q^L **is compact**

- action of L on configurations: shift σ_z

$$\sigma_z(c) = z' \mapsto c(z + z')$$

- action of L on configurations: shift σ_z

$$\sigma_z(c) = z' \mapsto c(z + z')$$

- CA are shift-invariant: $\sigma_z \circ F = F \circ \sigma_z$
- CA are continuous

- action of L on configurations: shift σ_z

$$\sigma_z(c) = z' \mapsto c(z + z')$$

- CA are shift-invariant: $\sigma_z \circ F = F \circ \sigma_z$
- CA are continuous

Hedlund's Theorem

F is a cellular automaton **iff** it is continuous and shift-invariant.

- action of L on configurations: shift σ_z

$$\sigma_z(c) = z' \mapsto c(z + z')$$

- CA are shift-invariant: $\sigma_z \circ F = F \circ \sigma_z$
- CA are continuous

Hedlund's Theorem

F is a cellular automaton **iff** it is continuous and shift-invariant.

Corollary: if a CA is bijective then its inverse is also a CA.

Théorie

AC comme systèmes dynamiques

- dynamique orbitale

  étude du graphe de la relation $x \to y \equiv F(x) = y$

- dynamique topologique

  idem + distance entre configurations

- dynamique mesurée

  idem en remplaçant l'espace Q^L
  par l'espace des mesures de proba sur Q^L

Plan de l'exposé

Quelques problèmes standards

- avoir un point fixe

$$\exists x :\ F(x) = x$$

- réversibilité

$$\forall x, y :\ F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$$

- surjectivité

$$\forall y, \exists x :\ F(x) = y$$

- ensemble limite

$$\Omega = \bigcap_t F^t\left(Q^{\mathbb{Z}^d}\right)$$

- ensemble μ-limite

$$u \in L\left(\Omega_\mu\right) \Leftrightarrow F^t\mu([u]) \not\to 0$$

- sensibilité aux conditions initiales

$$\exists \epsilon, \forall \mathbf{x}, \forall \delta, \exists \mathbf{y}, \exists t,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \delta \text{ and } d\left(F^t(\mathbf{x}), F^t(\mathbf{y})\right) > \epsilon$$

1D, temps borné : le royaume des automates

Automates de Büchi

- un automate fini $\mathcal{A} = \left(\Sigma, Q, \delta, i, F\right)$
- qui lit des mots infinis: Σ^{ω}

  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ peut lire u en visitant une **infinité de fois** F

1D, temps borné : le royaume des automates

Automates de Büchi

- un automate fini $\mathcal{A} = \left(\Sigma, Q, \delta, i, F\right)$
- qui lit des mots infinis: Σ^ω

  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ peut lire u en visitant une **infinité de fois** F

J. R. Büchi, 1962

- stables par union, intersection et complémentation
- on peut décider si au moins un mot est accepté

1D, temps borné : le royaume des automates

Automates de Büchi

- un automate fini $\mathcal{A} = \big(\Sigma, Q, \delta, i, F\big)$
- qui lit des mots infinis: Σ^ω

  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ peut lire u en visitant une **infinité de fois** F

J. R. Büchi, 1962

- stables par union, intersection et complémentation
- on peut décider si au moins un mot est accepté

- si $\Sigma = X \times Y$, un langage $L \subseteq \Sigma^\omega$ peut être vu comme une **relation** entre X^ω et Y^ω
- notion de **relation reconnaissable** par automate de Büchi

1D, temps borné : le royaume des automates

- **structure ω-automatique**

  objets des mots infinis

  relations relations Büchi-reconnaissables

1D, temps borné : le royaume des automates

- **structure ω-automatique**

objets	des mots infinis
relations	relations Büchi-reconnaissables

Model checking

La théorie du premier ordre d'une structure ω-automatique est décidable.

1D, temps borné : le royaume des automates

- **structure ω-automatique**

  objets des mots infinis

  relations relations Büchi-reconnaissables

Model checking

La théorie du premier ordre d'une structure ω-automatique est décidable.

- si F est un AC 1D, alors $F(x) = y$ est Büchi-reconnaissable.

1D, temps borné : le royaume des automates

- **structure ω-automatique**

  objets des mots infinis

  relations relations Büchi-reconnaissables

Model checking

La théorie du premier ordre d'une structure ω-automatique est décidable.

- si F est un AC 1D, alors $F(x) = y$ est Büchi-reconnaissable.

Théorème

Toute formule utilisant F, $=$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, et des quantifications sur les configurations est décidable pour les AC 1D.

- exemples : point fixe, surjectivité, réversibilité, etc...

2D : the realm of tilings

2D : the realm of tilings

Theorem

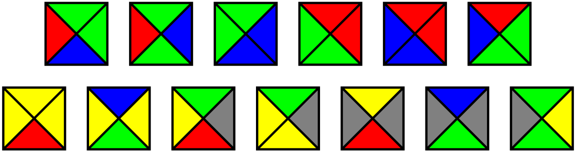
In 2D, it is undecidable to know whether a CA has a fixed point.

2D : the realm of tilings

Theorem

In 2D, it is undecidable to know whether a CA has a fixed point.

Proof: the domino problem is undecidable (Berger, 1966)

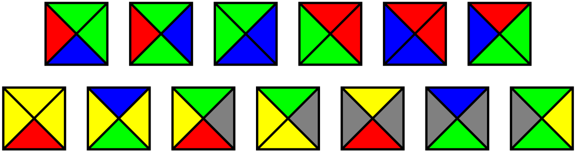


2D : the realm of tilings

Theorem

In 2D, it is undecidable to know whether a CA has a fixed point.

Proof: the domino problem is undecidable (Berger, 1966)



Theorem (Kari, 1990, 1994)

In 2D, both injectivity and surjectivity are undecidable.

1D, dynamique asymptotique $\sim$ 2D

1D, dynamique asymptotique $\sim$ 2D

Théorème (J. Kari, 1992)

Toute propriété non-triviale de Ω est indécidable.

- **nilpotence** $\equiv$ Ω est un singleton

1D, dynamique asymptotique $\sim$ 2D

Théorème (J. Kari, 1992)

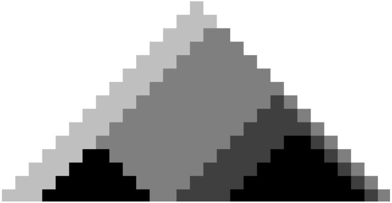
Toute propriété non-triviale de Ω est indécidable.

- **nilpotence** $\equiv \Omega$ est un singleton

Théorème (M. Delacourt, 2011)

En 1D, toute propriété non-triviale de Ω_μ est indécidable.

- μ**-nilpotence** $\equiv \Omega_\mu$ est un singleton



Complexité de la prédiction

Problème de la prédiction

Connaissant l'état de toutes les cellules dans un rayon t, quel est l'état de la cellule centrale après t étapes ?

Complexité de la prédiction

Problème de la prédiction

Connaissant l'état de toutes les cellules dans un rayon t, quel est l'état de la cellule centrale après t étapes ?

- problème décidable en temps polynomial
- P-complet en général

Complexité de la prédiction

Problème de la prédiction

Connaissant l'état de toutes les cellules dans un rayon t, quel est l'état de la cellule centrale après t étapes ?

- problème décidable en temps polynomial
- P-complet en général
- pour l'automate majorité (plus proches voisins) c'est :
  - très facile en 1D (classe NC)

Complexité de la prédiction

Problème de la prédiction

Connaissant l'état de toutes les cellules dans un rayon t, quel est l'état de la cellule centrale après t étapes ?

- problème décidable en temps polynomial
- P-complet en général
- pour l'automate majorité (plus proches voisins) c'est :
  - très facile en 1D (classe NC)
  - P-complet en 3D (C. Moore, 1997)

Complexité de la prédiction

Problème de la prédiction

Connaissant l'état de toutes les cellules dans un rayon t, quel est l'état de la cellule centrale après t étapes ?

- problème décidable en temps polynomial
- P-complet en général
- pour l'automate majorité (plus proches voisins) c'est :
  - très facile en 1D (classe NC)
  - P-complet en 3D (C. Moore, 1997)
  - ouvert en 2D !!

Problèmes ouverts

Problèmes ouverts

- frontière décidable/indécidable en 1D ?
- haute indécidabilité et dépendance en la dimension ?

Plan de l'exposé

The Problem

- choose some CA with evolution rule ϕ

The Problem

- choose some CA with evolution rule ϕ
- ϵ**-perturbation:** At each step,
  - either choose a state at random
  - or apply ϕ

The Problem

- choose some CA with evolution rule ϕ

- ϵ**-perturbation:** At each step,
  - either choose a state at random (proba ϵ)
  - or apply ϕ (proba $1 - \epsilon$)

The Problem

- choose some CA with evolution rule ϕ

- ϵ**-perturbation:** At each step,
  - either choose a state at random (proba ϵ)
  - or apply ϕ (proba $1-\epsilon$)

- **what we want to study:**

  Starting from initial configuration x,
  what is the distribution $\mu_t(x)$
  of configurations at time t?

The Problem

- choose some CA with evolution rule ϕ

- **ϵ-perturbation:** At each step,
  - either choose a state at random (proba ϵ)
  - or apply ϕ (proba $1 - \epsilon$)

- **what we want to study:**

  Starting from initial configuration x,
  what is the distribution $\mu_t(x)$
  of configurations at time t?

1. does $\lim_{t\to\infty} \mu_t(x)$ depend on x?
2. can we do something useful with an ϵ-pertubated rule?

Experiments

ϵ-perturbations with $\epsilon = 0.05$

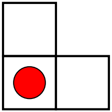
- Game of Life

DEMO

- Majority

DEMO

- Toom's majority



rule: change to majoritary state as seen in neighborhood

DEMO

Formal setting

- **invariant distribution:**

$$\mu = F\mu$$

- for **every lattice**, there is always (at least) one invariant distribution (compactness)
- ergodicity:
  1. there exists an invariant distribution μ
  2. for all x $\mu_t(x) \to \mu$

  intuition: *all information about x is ultimately lost*

Formal setting

- **invariant distribution:**

$$\mu = F\mu$$

- for **every lattice**, there is always (at least) one invariant distribution (compactness)
- ergodicity:
  1. there exists an invariant distribution μ
  2. for all x $\mu_t(x) \to \mu$

  intuition: *all information about x is ultimately lost*

- **finite lattice**
  - ϵ-perturbation is a **finite irreducible Markov chain**
  - **Theorem:** it is **always ergodic**

Formal setting

- **invariant distribution:**

$$\mu = F\mu$$

- for **every lattice**, there is always (at least) one invariant distribution (compactness)
- ergodicity:
  1. there exists an invariant distribution μ
  2. for all x $\mu_t(x) \to \mu$

  intuition: *all information about x is ultimately lost*

- **finite lattice**
  - ϵ-perturbation is a **finite irreducible Markov chain**
  - **Theorem:** it is **always ergodic**

Theorems

Toom's majority

Toom's rule is not ergodic.

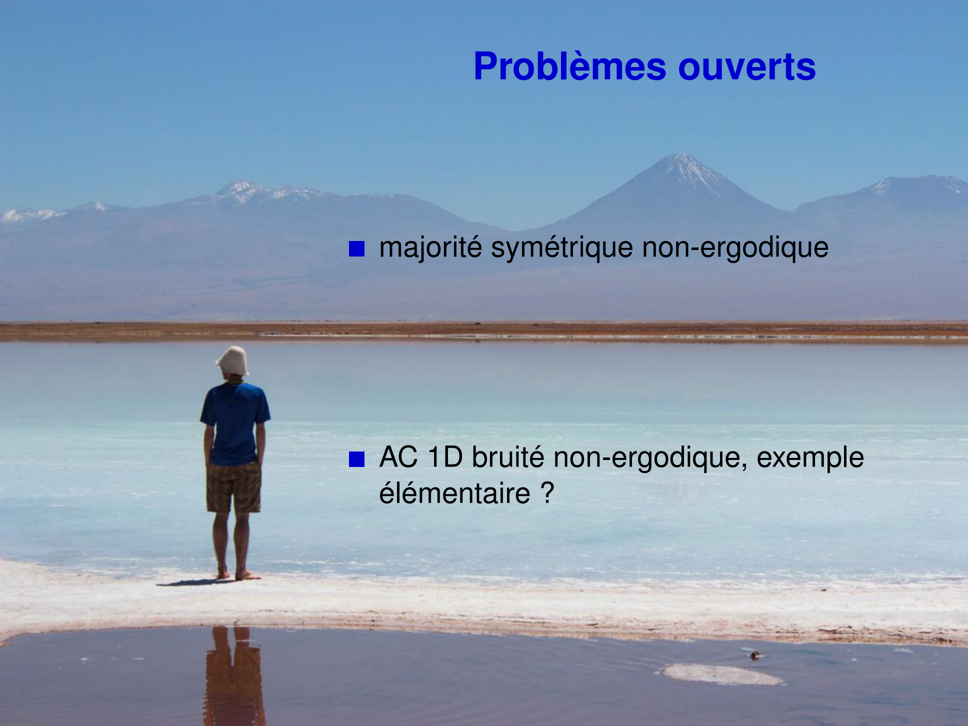
Reliable computation

For any 1D CA F, there is a 3D CA G that can simulate F even with ϵ-perturbation

(for ϵ small enough)

P. Gács *et. al.*

http://www.cs.bu.edu/~gacs/recent-publ.html



Problèmes ouverts

- majorité symétrique non-ergodique
- AC 1D bruité non-ergodique, exemple élémentaire ?

Plan de l'exposé

Problem statement

- fix a **deterministic** CA rule
- fix a random distribution μ_0

Problem statement

- fix a **deterministic** CA rule
- fix a random distribution μ_0

- **what we want to study:**

Starting from a μ_0-**random initial configuration**,
what is the distribution μ_t
of configurations at time t?

Problem statement

- fix a **deterministic** CA rule
- fix a random distribution μ_0

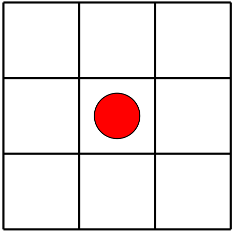
- **what we want to study:**

  Starting from a μ_0-**random initial configuration**,
  what is the distribution μ_t
  of configurations at time t?

1. what is $\lim_{t \to \infty} \mu_t$?
2. what kind of convergence?

Experiments

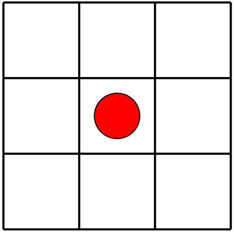
The sum modulo rule



- p a prime number
- **states:** $\{0, \ldots, p-1\}$
- **rule:** $\phi(x) = \sum x_i \bmod p$

Experiments

The sum modulo rule



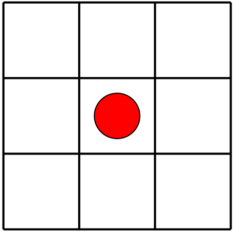
- p a prime number
- **states:** $\{0, \ldots, p-1\}$
- **rule:** $\phi(x) = \sum x_i \bmod p$

- **(p=2)** power of p time steps

DEMO

Experiments

The sum modulo rule



- p a prime number
- **states:** $\{0, \ldots, p-1\}$
- **rule:** $\phi(x) = \sum x_i \bmod p$

- **(p=2)** power of p time steps

DEMO

- **(p=7)** looking at μ_t when starting with many 0s

DEMO

Theorem

- **Cesarò mean:**

$$M_t = \frac{1}{t} \sum_{i \le t} \mu_i \ .$$

Theorem

- **Cesarò mean:**

$$M_t = \frac{1}{t} \sum_{i \leq t} \mu_i \ .$$

Averaging

Starting from any distribution of states*, M_t converges to uniform distribution.

- a kind of second law of thermodynamics

M. Pivato *et. al*

`http://euclid.trentu.ca/pivato/Research/research.html`

Problèmes ouverts

- comprendre la convergence simple ?
- mélangeant $\Rightarrow$ facilement prédictible ?

Plan de l’exposé

Different Notions of Universality

- Cellular Automata can be simulated on a computer.

Different Notions of Universality

- Cellular Automata can be simulated on a computer.

- Converse also true: CA can simulate computers
- *example:* Game of Life!

Different Notions of Universality

- Cellular Automata can be simulated on a computer.

- Converse also true: CA can simulate computers
- *example:* Game of Life!

- **Difficulty:** how to define “can simulate”?

Simulation of a CA by another CA

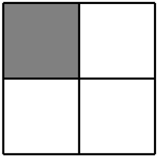
- **intuition:**
  - **simulated** / simulator
  - **1 cell** $\leftrightarrow$ $m \times n$ block of cells
  - **1 state** $\leftrightarrow$ $m \times n$ pattern of states
  - **1 time step** $\leftrightarrow$ a constant number of steps

Simulation of a CA by another CA

- **intuition:**
  - **simulated** / simulator
  - **1 cell** $\leftrightarrow$ $m \times n$ block of cells
  - **1 state** $\leftrightarrow$ $m \times n$ pattern of states
  - **1 time step** $\leftrightarrow$ a constant number of steps

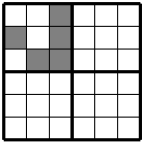
- **example:**

Diagonal shift



T=0

Game of Life



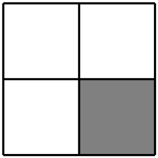
T=0

Simulation of a CA by another CA

- **intuition:**
  - **simulated** / simulator
  - **1 cell** $\leftrightarrow$ $m \times n$ block of cells
  - **1 state** $\leftrightarrow$ $m \times n$ pattern of states
  - **1 time step** $\leftrightarrow$ a constant number of steps

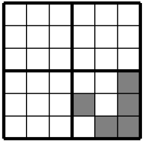
- **example:**

Diagonal shift



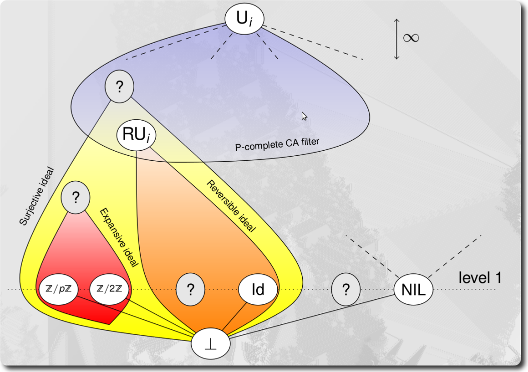
T=1

Game of Life



T=12

Théorie des pré-ordre de simulation



M. Delorme *et. al.*

Bulking II: Classifications of Cellular Automata

Intrinsic Universality

- **Definition:**

  a CA is *intrinsically universal* if it can simulate any CA

Intrinsic Universality

- **Definition:**

  a CA is *intrinsically universal* if it can simulate any CA

- Game of Life is intrinsically universal!

Intrinsic Universality

- **Definition:**

  a CA is *intrinsically universal* if it can simulate any CA

- Game of Life is intrinsically universal!

- **Theorem:** There is no algorithm to decide intrinsic universality.

Intrinsic Universality

- **Definition:**

  a CA is *intrinsically universal* if it can simulate any CA

- Game of Life is intrinsically universal!

- **Theorem:** There is no algorithm to decide intrinsic universality.

N. Ollinger

Universalities in Cellular Automata (Handbook of Natural Computing)

How Common is Universality?

- **partial answer:** symmetry is almost surely enough

How Common is Universality?

- **partial answer:** symmetry is almost surely enough
- what symmetry?
  1. **“hyper-locality”:** $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in \{x_1, \ldots, x_k\}$
  2. **“hyper-isotropy”:** ϕ invariant under any permutation of neighbors (x_i)

How Common is Universality?

- **partial answer:** symmetry is almost surely enough
- what symmetry?
  1. **"hyper-locality":** $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in \{x_1, \ldots, x_k\}$
  2. **"hyper-isotropy":** ϕ invariant under any permutation of neighbors (x_i)

Theorem

For symmetric CA, the proportion of universal CA goes to 1 when size (states or neighborhood) goes to ∞

DEMO

Problèmes ouverts

- un universel *complet* ?
- densité de l’universalité ?

Anti-plan de l'exposé

1. AC comme modèle de calcul
    - reconnaissance “parallèle” de langage
    - classes de complexité
    - algorithmique sur AC

2. AC et paradigmes inspirés de la physique
    - conservation de quantités
    - systèmes de particules
    - calcul et réversibilité

3. AC et modélisation
    - zoologie de la modélisation de phénomènes naturels
    - relations avec les EDP
    - simulations numériques

Merci !